Cálculo diferencial e integral

PEARSON

CONAMAT
COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Cálculo diferencial e integral

Arturo Aguilar Márquez
Fabián Valapai Bravo Vázquez
Herman Aurelio Gallegos Ruiz
Miguel Cerón Villegas
Ricardo Reyes Figueroa

REVISIÓN TÉCNICA

Ing. Carlos Lozano Sousa (M.Sc.)
Ing. Agustín Vázquez Sánchez (M. en C.)
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Estado de México

Prentice Hall

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Cálculo diferencial e integral
Primera edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2010

ISBN: 978-607-442-539-0
Área: Matemáticas

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 504

Todos los derechos reservados

Editor: Lilia Moreno Olvera
e-mail: lilia.moreno@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Alejandro Gómez Ruiz
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

PRIMERA EDICIÓN, 2010

D.R. © 2010 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5° Piso
Industrial Atoto
53519 Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031

Prentice-Hall es marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN: 978-607-442-539-0

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 12 11 10 09

Prentice Hall
es una marca de

PEARSON

Para los que enseñan y para los que aprenden

ING. ARTURO SANTANA PINEDA

El poder de las matemáticas

El que domina las matemáticas
piensa, razona, analiza y por ende
actúa con lógica en la vida cotidiana,
por tanto, domina al mundo.

Ing. Arturo Santana Pineda

Prefacio

El *Colegio Nacional de Matemáticas* es una institución que, desde su fundación, ha impartido cursos de regularización en las áreas de Matemáticas, Física y Química, con resultados altamente satisfactorios. Es por ello que su fundador y director general, el Ingeniero Arturo Santana Pineda, decidió plasmar y compartir la experiencia adquirida en este libro que recopila lo aprendido en todos estos años y cuyo principio fundamental es que la persona que aprende matemáticas, piensa, razona, analiza y por tanto actúa con lógica.

A través de esta institución y sus docentes, se ha logrado no sólo resolver el problema de reprobación con el que llega el estudiante sino, también, cambiar su apreciación sobre la materia, de tal forma, que se va convencido de que es fácil aprender matemáticas y que puede incluso dedicarse a ellas. De ahí que jóvenes que han llegado con serios problemas en el área, una vez que descubren su potencial han decidido estudiar alguna carrera afín.

De esta forma, se decide unir a los docentes con mayor experiencia y trayectoria dentro de la institución para que conjuntamente escriban un libro que lejos de presunciones formales, muestre la parte práctica que requiere un estudiante al aprender matemáticas y que le sirva de refuerzo para los conocimientos adquiridos en el aula.

Enfoque

El libro tiene un enfoque 100% práctico, por lo que la teoría que se trata es lo más básica posible, sólo se abordan los conceptos básicos para que el estudiante comprenda y se ejercite en la aplicación de la teoría analizada en el aula, en su libro de texto y con su profesor.

De esta manera, se pone mayor énfasis en los ejemplos, en donde el estudiante tendrá la referencia para resolver los ejercicios que vienen al final de cada tema y poder así reafirmar lo aprendido. Estamos convencidos de que es una materia en la cual el razonamiento es fundamental para su aprendizaje, sin embargo, la práctica puede lograr que este razonamiento se dé más rápido y sin tanta dificultad.

Estructura

El libro está formado por trece capítulos, los cuales llevan un orden específico que siempre toma en cuenta que el estudio de las matemáticas es un proceso en construcción, es decir, cada capítulo se liga con los conocimientos adquiridos en los capítulos anteriores.

Cada capítulo está estructurado con teoría, ejemplos y ejercicios propuestos. Los ejemplos son resueltos paso a paso para que el lector comprenda el procedimiento y posteriormente resuelva los ejercicios correspondientes. Las respuestas a los ejercicios se encuentran al final del libro, de tal forma que el estudiante verifique si los resolvió correctamente y compruebe su aprendizaje. Además, en algunos capítulos aparece una sección de problemas de aplicación, la cual tiene como objeto hacer una vinculación con casos de la vida cotidiana y así mostrar la eficacia de aplicar los conocimientos adquiridos en cada tema.

Como recomendación se propone que se resuelvan los ejercicios preliminares de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría y geometría analítica que se encuentran al final del libro, para que el lector haga un diagnóstico de sus conocimientos en dichas áreas, los cuales son fundamentales para iniciar el aprendizaje del cálculo. En caso de tener algún problema con dichos ejercicios se recomienda consultar los temas correspondientes en los libros de aritmética y álgebra, geometría y trigonometría y geometría analítica de la serie CONAMAT.

En el primer capítulo se estudian las funciones, su valor, clasificación gráfica, sus propiedades, sus operaciones, etc. En el segundo, el concepto de límite y su cálculo, con esto se da paso para estudiar la continuidad de una función en el tercer capítulo.

El cuarto capítulo trata la derivada, su definición, su interpretación geométrica, sus reglas de derivación, etc. En el quinto capítulo se dan las aplicaciones de la derivada, máximos y mínimos, ecuaciones de las rectas tangente y normal, ángulo entre dos curvas, punto de inflexión, problemas de optimización y razón de cambio, aplicaciones a la economía y diferenciales.

El estudio del cálculo integral comienza en el capítulo 6 con las propiedades de las sumas y la suma de Reimann. En el capítulo 7 se estudia la forma de resolver integrales inmediatas (fórmulas de integración, cambio de variable, integración completando el trinomio cuadrado perfecto); posteriormente, en el octavo capítulo, se ven integrales de diferenciales trigonométricas (casos de potencias trigonométricas) y los métodos de integración (sustitución trigonométrica, integración por partes, fracciones parciales, sustitución por una nueva variable, integrales de diferenciales binomiales y transformaciones) en el noveno. En el capítulo 10 se contemplan las aplicaciones de la integral; área bajo la curva, entre dos curvas, volúmenes, longitud de arco y aplicaciones de la integral.

En el capítulo 11 se introduce al estudiante a las ecuaciones diferenciales, con la intención de mostrarle una aplicación del cálculo y que con ello pueda iniciar un curso formal sobre el tema.

Por último, se incluye el apéndice A que contempla tres capítulos complementarios que son: logaritmos, progresiones y matrices, los cuales se adicionan puesto que se consideran en muchos planes de estudio.

Agradecimientos

Según Benjamín Franklin, invertir en conocimientos produce siempre los mejores intereses, por lo que espero que obtengas, a través de este libro, las más grandes ganancias para tu futuro profesional.

Arturo Santana Pineda
Director General de CONAMAT

A mi madre por darme la vida y enseñarme a vivirla, Andrey por ser y estar conmigo, Chema e Hiram los alumnos que se volvieron mis hermanos, a mi familia (Echeverría, Pineda y Sánchez), a la UNAM, al ingeniero Santana, Rox llegaste a tiempo, a los cuatro fantásticos: Herman, Fabián, Ricardo y Miguel, fue un placer compartir este trabajo. A mis alumnos que fueron y serán.

Arturo Aguilar Márquez

A mis padres María Elena y Álvaro, por brindarme la vida, por sus enseñanzas y consejos; a mi esposa e hijos (Ana, Liam y Daniel), porque son la razón de mi vida y mi inspiración; a mis hermanos Belem, Adalid y Tania por apoyarme incondicionalmente y sobre todo a mis compañeros y amigos: Ricardo, Miguel, Arturo y Herman.

Fabián Valapai Bravo Vázquez

Una vez mi padre me dijo que “un hombre triunfador no es el que acumula riquezas o títulos, sino es aquel que se gana el cariño, admiración y respeto de sus semejantes”, agradezco y dedico esta obra a la memoria de mi padre el Sr. Herman Gallegos Bartolo que me dio la vida y que por azares del destino ya no se encuentra con nosotros. A Eli y José Fernando que son el motor de mi vida.

Herman A. Gallegos Ruiz

A toda mi familia muy en especial a Lupita y Agustín, por haberme dado la vida y ser un ejemplo a seguir; a mis hermanos Elizabeth y Hugo por quererme y soportarme. Quiero además, reconocer el esfuerzo de mis amigos y compañeros Arturo, Fabián, Herman y Ricardo con quien tuve la oportunidad de ver cristalizado este sueño.

Miguel Cerón Villegas

A mis padres Rosa y Gerardo, por darme la vida; a mis hermanos Javier, Gerardo y Arturo; un especial agradecimiento a mi esposa Ma. Mercedes; a mis hijos Ricardo y Allan por su sacrificio, comprensión y tolerancia; un reconocimiento a mis amigos Herman, Arturo A., Fabián, Miguel, Roxana y Arturo S. por hacer realidad nuestro sueño.

Ricardo Reyes Figueroa

Un agradecimiento especial a los alumnos que tomaron clase con alguno de nosotros, ya que gracias a ellos logramos adquirir la experiencia para poder escribir este libro.

Los autores

Acerca de los autores

Arturo Aguilar Márquez. Llegó como estudiante al Colegio Nacional de Matemáticas, desarrolló habilidades y aptitudes que le permitieron incorporarse a la plantilla de docentes de la Institución. Realizó estudios de Actuaría en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México y ha impartido clases de Matemáticas por más de 11 años en CONAMAT.

Fabián Valapai Bravo Vázquez. Desde muy temprana edad, con la preparación de profesores de CONAMAT, participó en concursos de matemáticas a nivel nacional. Posteriormente, se incorporó a la plantilla docente de la misma institución donde ha impartido la materia de Matemáticas durante 12 años. Al mismo tiempo, estudió la carrera de Diseño Gráfico en la Escuela Nacional de Artes Plásticas.

Herman Aurelio Gallegos Ruiz. Se inició como profesor en CONAMAT. Realizó estudios en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional y Actuaría en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Ha impartido clases de Matemáticas y Física por más de 15 años en el Colegio Nacional de Matemáticas.

Miguel Cerón Villegas. Es egresado de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas del Instituto Politécnico Nacional, realizó estudios de Ingeniería Industrial y tiene más de 15 años de experiencia en docencia.

Ricardo Reyes Figueroa. Inició su trayectoria en la disciplina de las Matemáticas tomando cursos en CONAMAT. Dejando ver su gran capacidad para transmitir el conocimiento, se incorpora como docente en la misma institución donde ha impartido las materias de Matemáticas y Física durante 19 años. Realizó sus estudios de Matemáticas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, y de Matemáticas Puras en la Universidad Autónoma Metropolitana.

Contenido

Cálculo diferencial

Cálculo integral

Cálculo diferencial

CAPÍTULO 1

RELACIONES Y FUNCIONES

Reseña HISTÓRICA

La aparición del análisis infinitesimal fue la culminación de un largo proceso, cuya esencia matemática interna consistió en la acumulación y asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial.

Para el desarrollo de este proceso se contaba con el álgebra; las técnicas de cálculo; introducción a las matemáticas variables; el método de coordenadas; ideas infinitesimales clásicas, especialmente de Arquímedes; problemas de cuadraturas y la búsqueda de tangentes. Las causas que motivaron este proceso fueron las exigencias de la mecánica newtoniana y la astronomía.

La última etapa del desarrollo del análisis infinitesimal fue el establecimiento de la relación e inversibilidad mutua entre las investigaciones diferenciales, y a partir de aquí la formación del cálculo diferencial.

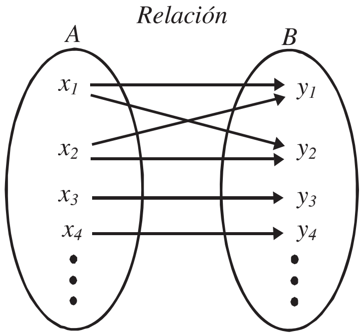
El cálculo diferencial surgió casi simultáneamente en dos formas diferentes: en la forma de teoría de fluxiones de Newton y bajo la forma del cálculo de diferenciales de G. W. Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Relación

Regla de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

Ejemplo



Esta relación se representa con el siguiente conjunto de pares ordenados

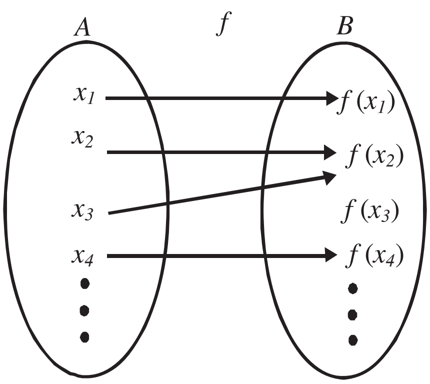
$$R = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\ldots\}$$

Función

El concepto de función es uno de los más importantes en el mundo de las matemáticas. Las funciones no sólo representan fórmulas, o lugares geométricos, también se utilizan como modelos matemáticos que resuelven problemas de la vida real.

A continuación se dan algunas definiciones de función:

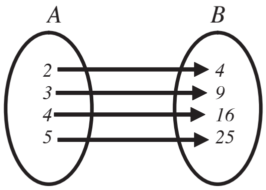
- Es una regla de correspondencia que asocia a los elementos de dos conjuntos. La cual a cada elemento del primer conjunto (dominio) le asocia un solo elemento del segundo conjunto (contradominio).
- Sean A y B dos conjuntos y f una regla que a cada $x \in A$ asigna un único elemento $f(x)$ del conjunto B, se dice que f es una función que va del conjunto A al B, y se representa de la siguiente forma: $f: A \rightarrow B$, donde al conjunto A se le llama dominio y al B contradominio, que también se representa por medio de un diagrama de flechas:

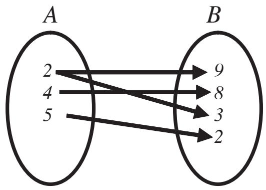


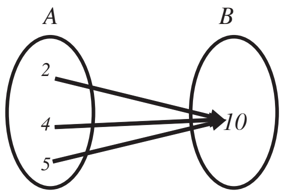
- Una función es una colección de pares ordenados con la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) pertenecen a una colección, entonces se cumple que $b = c$; es decir, en una función no puede haber dos pares con el mismo primer elemento.

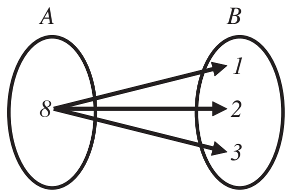
EJEMPLOS

1 Determina si los siguientes diagramas representan una función o una relación:

1.


2.


3.


4.


Solución

El primer y el tercer diagramas corresponden a una función ya que a cada elemento del conjunto A se le asigna un solo elemento del conjunto B.

En el segundo diagrama al menos a un elemento del conjunto A se le asignan dos elementos del conjunto B, mientras que en el cuarto diagrama el elemento 8 se asocia con tres elementos del conjunto B, por tanto, se concluye que estos conjuntos representan una relación.

2 Determina si los siguientes conjuntos de pares ordenados corresponden a una función o a una relación:

$$A = \{(-2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$$

$$B = \{(3, 2), (3, 6), (5, 7), (5, 8)\}$$

$$C = \{(2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$$

$$M = \{(2, 4), (6, 2), (7, 3), (4, 12), (2, 6)\}$$

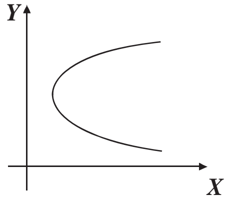
Solución

Los conjuntos A y C son funciones ya que el primer elemento de cada par ordenado no se repite. En el conjunto B el 3 y el 5 aparecen dos veces como primer elemento del par ordenado mientras que en el conjunto M al 2 se le están asignando el 4 y el 6 como segundo elemento, por tanto, B y M son relaciones.

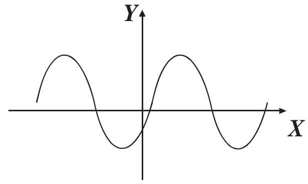
Las funciones y relaciones pueden tener una representación gráfica en el plano cartesiano. Para distinguir si se trata de una función o una relación basta con trazar una recta paralela al eje "Y" sobre la gráfica; si ésta interseca en dos o más puntos es una relación, si sólo interseca un punto será una función.

3 Determina si las siguientes gráficas representan una relación o una función.

1.



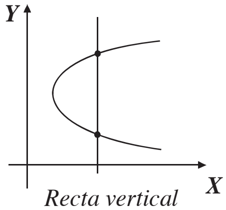
2.



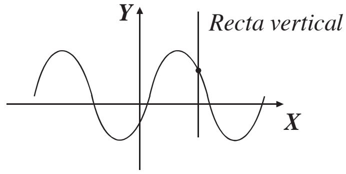
Solución

Se traza una recta vertical en ambas gráficas y se observa que en la primera interseca en dos puntos a la gráfica, por tanto, representa una relación y en la segunda, la recta vertical interseca en un punto a la gráfica, por consiguiente representa una función.

1.



2.



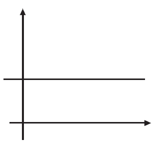
EJERCICIO 1

Identifica si los siguientes conjuntos representan funciones o relaciones.

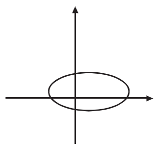
1. $\{(0, 3), (2, 3), (-1, 3)\ldots\}$
2. $\{(-3, 5), (3, 5), (-3, 2)\ldots\}$
3. $\{(4, 7), (-4, \sqrt{3}), (\sqrt{2}, 5)\ldots\}$
4. $\{(2, 5), (\sqrt{4}, 2), (3, -3)\ldots\}$
5. $\{(a, 2a), (-2a, 3a), (4a, a)\ldots\}$
6. $\left\{\left(\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{6}{4}, -1\right), \left(1, \frac{5}{2}\right)\ldots\right\}$

Identifica qué representa cada gráfica (función o relación):

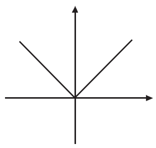
7.



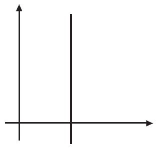
8.



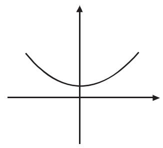
9.



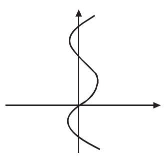
10.



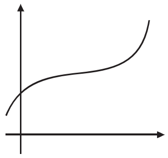
11.



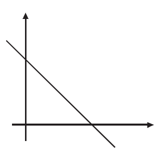
12.



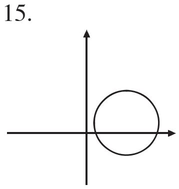
13.



14.



15.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Notación

Una función se denota o escribe como $y = f(x)$, donde:

x: variable independiente.

y: variable dependiente.

f: función, regla de asignación o correspondencia.

Clasificación

Las funciones se clasifican en: *algebraicas* y *trascendentes*

$$\text{Función}\begin{cases}\text{Algebraicas}\\ \text{Trascendentes}\begin{cases}\text{Trigonométricas}\\ \text{Inversas trigonométricas}\\ \text{Exponenciales}\\ \text{Logarítmicas}\end{cases}\end{cases}$$

Ejemplos

Algebraicas

$f(x) = x^3 - 4x$ $\qquad f(x) = \sqrt{x-4}$ $\qquad y = |x|$

$y = 3x^2 - 5x - 6$ $\qquad g(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ $\qquad g(x) = |x - 2| - 1$

Trascendentes

$f(x) = \cos x$ $\qquad f(x) = e^{4x}$ $\qquad s(t) = \ln(2t - 4)$

$f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$ $\qquad y = e^{\sqrt{x}} + 2$ $\qquad g(x) = \log(x + 1)$

Las funciones algebraicas y trascendentes pueden ser:

- **Explícitas**
  Es cuando la función está en términos de una variable, por ejemplo:

$y = x^2$ $\qquad f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$ $\qquad y = \operatorname{sen} 3x$ $\qquad s(t) = e^t$ $\qquad y = \log x$

$y = x^3 - 1$ $\qquad g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ $\qquad f(x) = \cos \dfrac{1}{2}x$ $\qquad g(x) = 2^{x+3}$ $\qquad f(x) = \ln(3x)$

- **Implícitas**
  Es cuando ambas variables forman parte de la ecuación, por ejemplo:

$$x^2 - 8y + 16 = 0 \qquad x^3 + y^2 - 3x = 0 \qquad \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \qquad e^y = x + 3$$

Las funciones que se estudiarán en este libro siempre tomarán valores de números reales tanto para la variable independiente como para la dependiente.

Valor de una función

El valor real $f(x)$ de una función es aquel que toma y cuando se asigna a x un determinado valor real.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén $f(-3)$ para $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$

Solución

Para obtener $f(-3)$ se sustituye $x = -3$ en la función y se realizan las operaciones indicadas,

$$f(-3) = 3(-3)^2 - 5(-3) - 2 = 27 + 15 - 2 = 40$$

Por tanto $f(-3) = 40$, es decir $y = 40$ cuando $x = -3$ o lo que es lo mismo, la curva pasa por el punto $(-3, 40)$ en el plano cartesiano.

2 Si $f(x) = \dfrac{3x-1}{5-x}$, encuentra $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$

Solución

Se sustituye $x = \dfrac{3}{4}$ en la función y se realizan las operaciones:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\left(\frac{3}{4}\right)-1}{5-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{9}{4}-1}{5-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{17}{4}} = \frac{5}{17}\text{, por tanto, cuando } x = \frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{17}$$

3 Si $s(t) = \sqrt{t-5}$, determina $s(4)$, $s(a+5)$

Solución

$s(4) = \sqrt{4-5} = \sqrt{-1}$, la función no está definida para $t = 4$, $\sqrt{-1}$ no tiene solución real

$$s(a+5) = \sqrt{a+5-5} = \sqrt{a}$$

4 Si $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, determina $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Solución

Se sustituye $x = \dfrac{\pi}{3}$, en $f(x)$ y se utiliza la identidad $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

5 Determina $\dfrac{f(a+b)-f(a)}{b}$ si $f(x) = \sqrt{x}$

Solución

Se obtiene que $\quad f(a+b) = \sqrt{a+b}$ y $f(a) = \sqrt{a}$

Se sustituyen los valores obtenidos:

$$\frac{f(a+b)-f(a)}{b} = \frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}$$

Un resultado equivalente se obtiene al racionalizar el numerador:

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}\cdot\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}=\frac{\left(\sqrt{a+b}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{b\cdot\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{b}{b\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$$

Finalmente, el resultado de $\dfrac{f(a+b)-f(a)}{b}=\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$

6 Si $y=\dfrac{x}{x+2}$, encuentra el valor de y cuando $x=-2$

Solución

Al evaluar la función en $x=-2$, se obtiene:

$$y=\frac{-2}{-2+2}=-\frac{2}{0}$$

La función no está definida para $x=-2$, ya que la división entre cero no está determinada.

7 Si $f(x)=x^2-1$, demuestra que $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{f(x)}{x^2}$

Demostración

Se sustituye $\dfrac{1}{x}$ en la función:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-1=\frac{1}{x^2}-1=\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{-\left(-1+x^2\right)}{x^2}=-\frac{x^2-1}{x^2}$$

Pero $x^2-1=f(x)$

Por tanto, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{f(x)}{x^2}$

EJERCICIO 2

Evalúa las siguientes funciones:

1. Si $f(x)=2x^2-3$, obtén $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(3)$, $f(0)$
2. Si $f(x)=x^2-5x+6$, determina $f(a)$, $f(a+b)$
3. Si $f(x)=3x^2+4x-2$, determina $f(x+h)$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
4. Si $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x+1}$, determina $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(x+h)-f(x)$
5. Si $f(x)=\sqrt{x^2-16}$, determina $f(5)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(3)$
6. Si $f(x)=\sqrt{x^2-3}$, determina $f(x+h)$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

7. Si $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, determina $\dfrac{f(x+b)-f(x)}{b}$

8. Si $f(x) = \sqrt{1-x}$, determina $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

9. Si $f(x) = \dfrac{|x-5|}{x+2}$, determina $f(1)$, $f(0)$, $f(x+5)$

10. Si $f(x) = -3x^2 + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x}$, determina $f(-1)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

11. Si $f(x) = x^2 - 3x$, demuestra que $f(3x) - f(x-1) = 4(x-1)(2x+1)$

12. Si $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, demuestra que $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$

13. Si $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, demuestra que $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

14. Si $f(x) = \tan x$, demuestra que $f(x) = f(x + 3\pi)$

15. Si $f(x) = \cos 2x$, demuestra que $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -f(x)$

16. Demuestra que para $f(x) = \sqrt{x-2}$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{1}{f(x+h)+f(x)}$

17. Si $h(x) = \sqrt{x^2-4}$, $r(x) = \sqrt{x^2+4}$, demuestra que $h\left(n+\dfrac{1}{n}\right) + r\left(n-\dfrac{1}{n}\right) = 2n$

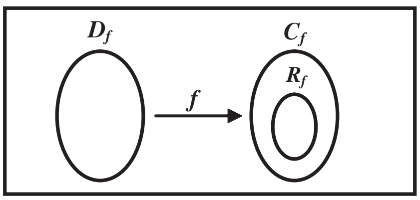
18. Si $f(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$, demuestra que $\dfrac{f(m)-f(n)}{1+[f(m)][f(n)]} = \dfrac{m-n}{1+mn}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dominio, contradominio y rango de una función

Dada una función $f: A \rightarrow B$, se dice que el conjunto A es el **dominio** (D_f) y B el **contradominio** (C_f) o codominio de f. En términos del plano cartesiano, el dominio corresponde al conjunto formado por los valores posibles para X mientras que el contradominio corresponde a los valores posibles para Y.

- **Rango (R_f)**
  Valores del contradominio para los cuales $y = f(x)$, siendo $f(x)$ la imagen de x.



EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = 3x^2 - 5x - 6$?

Solución

La función es polinomial, x puede tomar cualquier valor, por tanto, el dominio son todos los números reales, es decir $x \in R$ o dicho de otra forma $x \in (-\infty, \infty)$.

2 Determina el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$

Solución

La función es racional y el denominador debe ser distinto de cero, ya que la división entre cero no está definida, por tanto, se busca el valor para el cual $x + 5 = 0$ obteniendo $x = -5$, entonces el dominio es: $D_f = \{x \in R \mid x \neq -5\}$ o bien $x \in (-\infty, -5) \cup (-5, \infty)$.

3 ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x - 6}$?

Solución

Al factorizar el denominador se obtiene: $f(x) = \dfrac{x}{(x-6)(x+1)}$, el denominador se hace cero para

$$x = 6 \quad \text{o} \quad x = -1, D_f = \{x \in R \mid x \neq -1, x \neq 6\} \quad \text{o bien} \quad \{x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 6) \cup (6, \infty)$$

4 Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-5}$

Solución

El radicando debe ser mayor o igual a cero (ya que no hay valor real para raíces cuadradas de números negativos) es decir $x - 5 \geq 0$, de donde $x \geq 5$, por tanto $D_f = \{x \in R \mid x \geq 5\}$ o bien $x \in [5, \infty)$

5 Encuentra el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

Solución

Se plantea la desigualdad $x^2 - 16 \geq 0$, al resolverla se obtiene que el dominio es el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \leq -4 \text{ o } x \geq 4\}$ o bien $x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

6 Determina el dominio de la función $f(x) = \log(2x - 3)$

Solución

Para determinar el dominio de esta función se debe tomar en cuenta que $\log_b N = a$, para $N > 0$, por tanto, se plantea la desigualdad y se resuelve:

$$2x - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad 2x > 3 \quad \rightarrow \quad x > \frac{3}{2}$$

Entonces, el dominio es el conjunto $D_f = \left\{x \in R \mid x > \dfrac{3}{2}\right\}$, o bien, $x \in \left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$

7 Encuentra el rango de la función $f(x) = \frac{6x+1}{1+3x}$

Solución

Se despeja x:

$$y = \frac{6x+1}{1+3x} \rightarrow y(1+3x) = 6x+1 \rightarrow y + 3xy = 6x + 1$$

$$3xy - 6x = 1 - y \rightarrow 3x(y-2) = 1 - y \rightarrow x = \frac{1-y}{3(y-2)}$$

El denominador se hace cero cuando $y = 2$, por tanto el rango es el conjunto:

$$R_f = \{y \in R \mid y \neq 2\} \text{ o bien, } y \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

8 Determina el rango de la función $y = \sqrt{9-x^2}$

Solución

$y \geq 0$, porque la raíz es positiva o cero, se despeja x:

$$y = \sqrt{9-x^2} \rightarrow y^2 = 9 - x^2 \rightarrow x^2 = 9 - y^2 \rightarrow x = \sqrt{9-y^2}$$

Se plantea la desigualdad $9 - y^2 \geq 0$, al resolverla se obtiene que $y \in [-3, 3]$, pero $y \geq 0$, por tanto, el rango es el conjunto $R_f = \{y \in R \mid 0 \leq y \leq 3\}$, o bien, $y \in [0, 3]$

EJERCICIO 3

Determina el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2 - 4$
2. $f(x) = 3x^3 - 2$
3. $f(x) = \frac{x}{x+3}$
4. $f(x) = \frac{x-4}{5-x}$
5. $f(x) = \frac{3}{x^2-16}$
6. $f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x}$
7. $f(x) = \frac{1}{x^2-7x+10}$
8. $f(x) = \frac{x-1}{25-x^2}$
9. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
10. $f(x) = \frac{x-3}{2x^2+10x}$
11. $f(x) = \frac{1}{x^3-x}$
12. $f(x) = \sqrt{x+1}$
13. $f(x) = \sqrt{x-6}$
14. $f(x) = \sqrt{2-x}$
15. $f(x) = \sqrt{12-3x}$
16. $f(x) = \sqrt{x^2-25}$
17. $f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$
18. $f(x) = \sqrt{36-x^2}$

19. $f(x) = \sqrt{9+x^2}$

20. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

21. $f(x) = \sqrt[4]{x-5}$

22. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$

23. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3-x}}$

24. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+8}}$

25. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+4}{x-3}}$

26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{2x-3}}$

27. $f(x) = \log(3x+6)$

28. $f(x) = \ln(5-2x)$

29. $f(x) = \log\left(\dfrac{1}{x}\right)$

30. $f(x) = \log(3+2x-x^2)$

Determina el rango de las siguientes funciones:

31. $f(x) = x^2+1$

32. $f(x) = x^2-4$

33. $f(x) = 9-x^2$

34. $f(x) = 3x-x^2$

35. $f(x) = \dfrac{10x-1}{3-5x}$

36. $f(x) = \dfrac{2x-3}{4x+1}$

37. $y = \sqrt{x^2+1}$

38. $y = -\sqrt{2-x}$

39. $y = \sqrt{4-x^2}$

40. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

41. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$

42. $y = |x-4|$

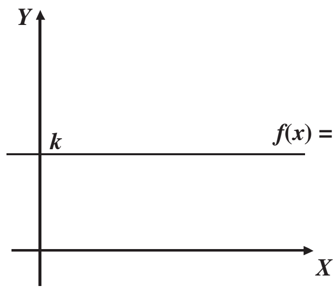
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Algunos tipos de funciones

Función constante

$f(x) = k$ con $k \in R$ representa una recta paralela al eje "X" sobre k.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Rango: $R_f = \{k\}$



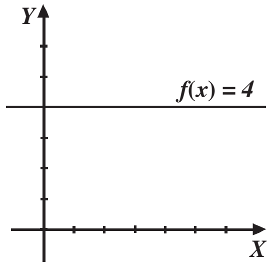
Ejemplo

Obtén la gráfica de $f(x) = 4$

Solución

Se traza una recta paralela al eje X sobre $y = 4$

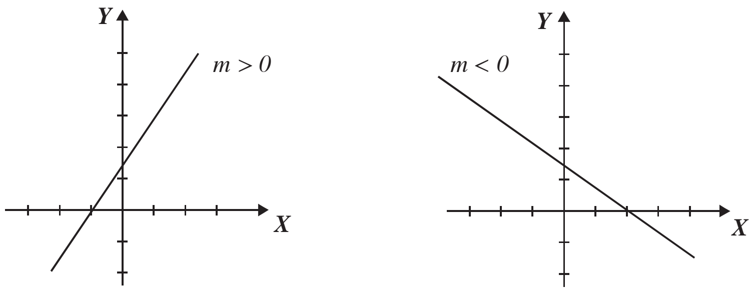
$$D_f = R \qquad R_f = \{4\}$$



Función lineal

Esta función tiene la forma $f(x) = mx + b$ y representa una recta en el plano cartesiano, en donde m es la pendiente y b la ordenada al origen.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$, Rango: $R_f = R$ o bien $y \in (-\infty, \infty)$



Para graficar una función lineal se lleva a cabo lo siguiente:

I. Se localiza la ordenada al origen, es decir, el punto $(0, b)$.

II. A partir de este punto, se localiza otro, tomando la pendiente como el incremento o decremento vertical sobre el incremento horizontal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Grafica la función $y = \frac{2}{3}x + 4$

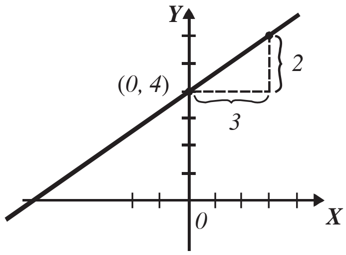
Solución

La pendiente y la ordenada al origen de la función:

$$y = \frac{2}{3}x + 4$$

$$m = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \text{ incremento vertical}}{3 \text{ incremento horizontal}}, \quad b = 4, \text{ representa el punto } (0, 4)$$

Gráfica de la función



2 Traza la gráfica de la función $y = -\frac{4}{5}x + 2$

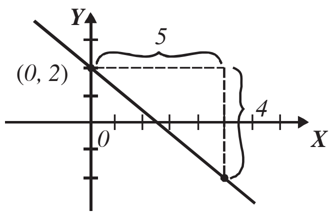
Solución

La pendiente y la ordenada al origen de la función:

$$y = -\frac{4}{5}x + 2$$

$$m = -\frac{4}{5} = \frac{-4}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{-4 \text{ decremento vertical}}{5 \text{ incremento horizontal}}, \quad b = 2, \text{ representa el punto } (0, 2)$$

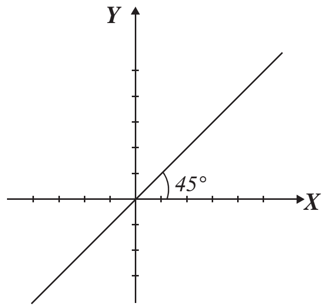
Gráfica de la función



Función identidad

Es la función lineal $f(x) = mx + b$, con $m = 1$ y $b = 0$, es decir: $f(x) = x$

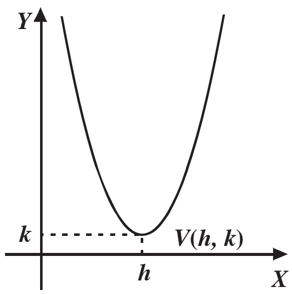
Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Rango: $R_f = R$ o bien $y \in (-\infty, \infty)$



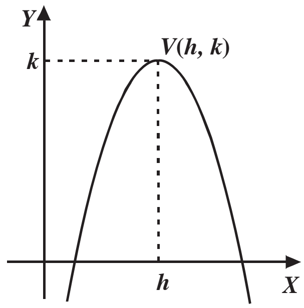
Función cuadrática

Es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y representa una parábola cóncava hacia arriba o hacia abajo

Si $a > 0$



Si $a < 0$



$V(h, k)$: son las coordenadas del vértice.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$

Rango: $y \in \left[\dfrac{4ac-b^2}{4a}, \infty\right)$

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$

Rango: $y \in \left(-\infty, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$

Para obtener las coordenadas (h, k) del vértice se aplican las siguientes fórmulas:

$$h = -\frac{b}{2a}, \; k = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

Ejemplo

Obtén el dominio, rango y la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Solución

Se identifican los valores de los coeficientes de cada término: $a = 1$, $b = -4$ y $c = 5$

$a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba

Se calculan los valores de h y k:

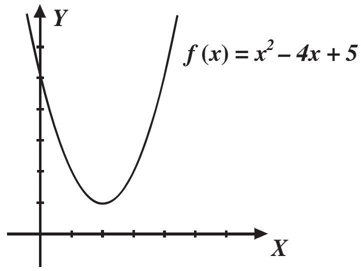
$$h = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2; \quad k = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(1)(5)-(-4)^2}{4(1)} = 1$$

El vértice es el punto $V(2, 1)$ y el dominio y rango son:

$$D_f = R \text{ o bien } x \in (-\infty, \infty) \qquad y \in \left[\frac{4ac-b^2}{4a}, \infty\right) = [1, \infty)$$

Para graficar, se tabula y se asignan valores de x menores y mayores que 2

x	0	1	2	3	4
y	5	2	1	2	5



La función $f(x) = x^n$

Con "n" entero positivo tiene como: Dominio $x \in (-\infty, \infty)$ es decir el conjunto de los reales R y Rango:

$$\begin{cases} y \in [0, \infty) & \text{si } n \text{ es par} \\ y \in (-\infty, \infty) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

EJEMPLOS

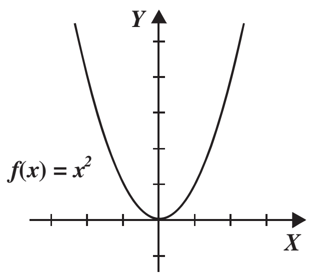
Ejemplos

1 Obtén la gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^4$

Solución

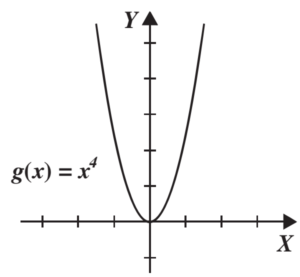
Se tabula con valores arbitrarios de x:

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = x^2$	4	1	0	1	4



Al graficar se obtiene:

x	$-\frac{3}{2}$	−1	0	1	$\frac{3}{2}$
$g(x) = x^4$	$\frac{81}{16}$	1	0	1	$\frac{81}{16}$

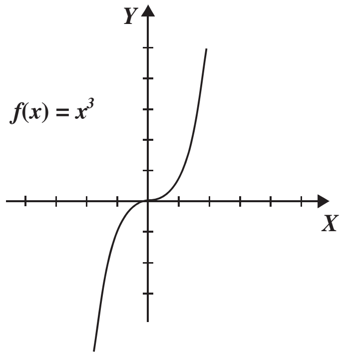


2 Obtén la gráfica de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^5$

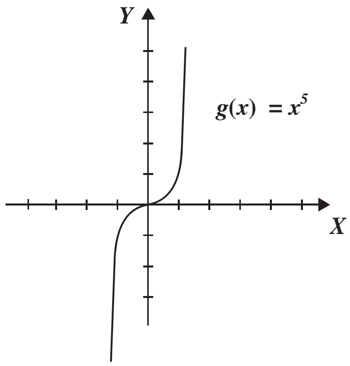
Solución

Se tabula para valores arbitrarios de x:

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = x^3$	−8	−1	0	1	8



x	$-\frac{3}{2}$	−1	0	1	$\frac{3}{2}$
$g(x) = x^5$	$-\frac{243}{32}$	−1	0	1	$\frac{243}{32}$



Función racional

Se expresa como el cociente de dos funciones polinomiales.

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ con } Q(x) \neq 0$$

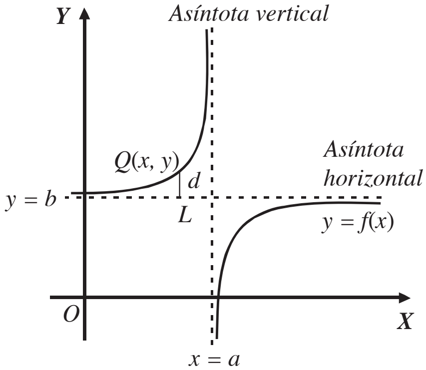
Definición de asíntota

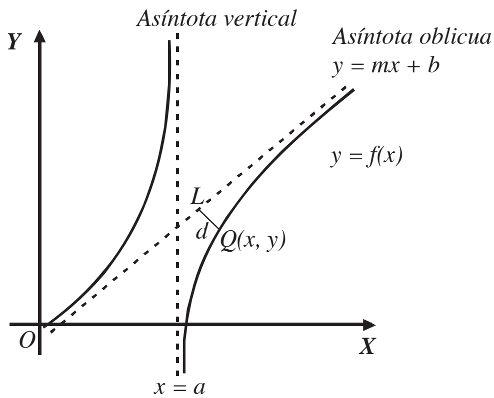
Si la distancia d entre una recta o curva L y el punto móvil $Q(x, y)$ de la función tiende a cero, entonces la recta o curva recibe el nombre de asíntota.

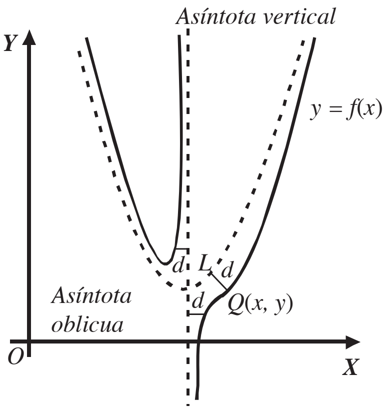
Existen tres tipos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

Cuando la gráfica de la función $f(x)$ se acerca a la curva o recta $L(x)$ y la distancia d entre un punto de $f(x)$ y la curva o recta $L(x)$ tiende a cero (es decir la gráfica no toca a $L(x)$), entonces $L(x)$ recibe el nombre de asíntota.

Ejemplos







En este capítulo sólo se estudiarán las asíntotas horizontales y verticales.

- **Asíntotas verticales**

  Una función de la forma $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, tiene asíntotas verticales si existen valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tal que se cumple lo siguiente:

$$Q(x_1) = Q(x_2) = \ldots = Q(x_n) = 0$$

- **Asíntotas horizontales**

  Se despeja la variable independiente x, si se obtiene una función de la forma $G(y) = \dfrac{R(y)}{S(y)}$, tal que para los valores de $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ se cumpla que:

$$S(y_1) = S(y_2) = \ldots = S(y_n) = 0$$

EJEMPLOS

1 Obtén la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Solución

El dominio de la función está dado por el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$, teniendo una asíntota en $x = 0$, es decir el eje vertical del plano.

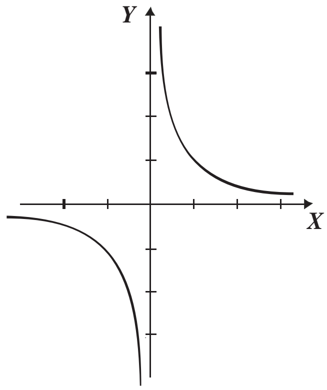
Al despejar x se obtiene $x = \dfrac{1}{y}$

De la cual se deduce que el rango está dado por $R_f = \{y \in R \mid y \neq 0\}$ y su asíntota horizontal es $y = 0$, es decir el eje horizontal del plano.

Si tabulas para valores de x diferentes de cero obtienes:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	no existe	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Se grafican las asíntotas y se localizan los puntos en el plano, se unen y se observa cómo la curva se acerca a las asíntotas sin tocarlas, haciendo la distancia entre la curva y las rectas cada vez más pequeña.



2 Determina el dominio, el rango y la gráfica de la función $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$

Solución

El denominador debe ser diferente de cero,

$$x + 2 \neq 0, \text{ entonces } x \neq -2$$

Por tanto, el dominio está dado por:

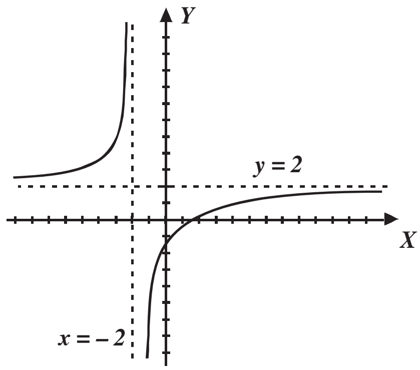
$$D_f = \{x \in R \mid x \neq -2\} \text{ o } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty) \text{ y la asíntota vertical es } x = -2$$

Al despejar x se obtiene el rango y la asíntota horizontal:

$$y = \frac{2x-3}{x+2}, \text{ entonces } x = \frac{2y+3}{2-y} \text{ donde } 2 - y \neq 0 \rightarrow y \neq 2$$

Por tanto, el $R_f = \{y \in R \mid y \neq 2\}$ y la asíntota horizontal es $y = 2$

Gráfica: Se trazan las asíntotas y mediante una tabulación se obtienen los pares ordenados, los cuales forman la siguiente curva:



Función raíz cuadrada

La función está dada por: $f(x) = \sqrt{g(x)}$, con $g(x) \geq 0$

EJEMPLOS

1 Obtén la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$

Solución

Para determinar el dominio se resuelve la desigualdad: $x + 2 \geq 0$ donde $x \geq -2$, entonces el dominio es el conjunto: $\{x \in R \mid x \geq -2\}$ o $x \in [-2, \infty)$

El rango se obtiene despejando x

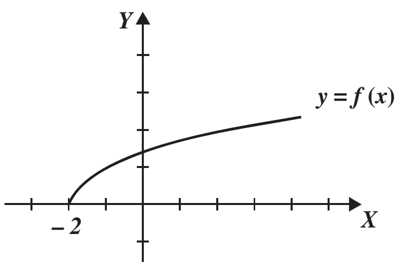
$$y = \sqrt{x+2} \quad \rightarrow \quad y^2 = x + 2 \quad \rightarrow \quad x = y^2 - 2$$

La función es una raíz positiva, o cero, es decir $y \in [0, \infty)$ y el despeje da como resultado una expresión polinomial donde $y \in R$, por tanto el rango está definido para $y \in [0, \infty)$

Al tabular dando algunos valores en el intervalo $x \in [-2, \infty)$ se obtiene:

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

La gráfica que se obtiene es:



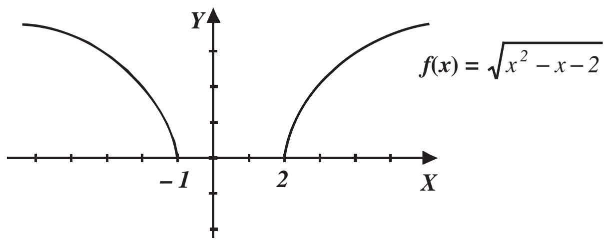
2 Determina la gráfica de la función: $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

Solución

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $x^2 - x - 2 \geq 0$, obteniendo que

$$x \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$$

Al despejar x se obtiene, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4y^2 + 9}}{2}$ donde $y \in (-\infty, \infty)$, $f(x)$ es una raíz positiva, o cero, por tanto el rango es: $y \in (-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$



3 Grafica la función $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Solución

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$, obteniendo que:

$$x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$$

Al despejar x para obtener el rango:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \rightarrow y^2 = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow y^2(x+1) = x - 1 \rightarrow y^2x + y^2 = x - 1$$

$$y^2x - x = -1 - y^2$$

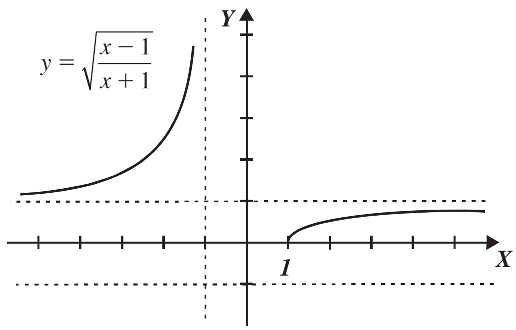
$$x(y^2 - 1) = -1 - y^2$$

$$x = \frac{-1 - y^2}{y^2 - 1}, \text{ donde } y \neq \pm 1.$$

La función es una raíz positiva, por tanto, $y \in [0, \infty)$, entonces el rango corresponde a:

$$y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = -1$ y dos horizontales en $y = -1$, $y = 1$, al graficar se obtiene:



Nota: Observe que gráficamente $y = -1$ no es asíntota.

Función valor absoluto

La función es $f(x) = |g(x)|$, donde $x \in D_g$ y $f(x) \geq 0$.

EJEMPLOS

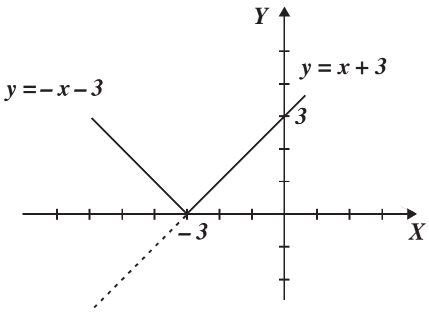
Ejemplos

1 Obtén la gráfica de $f(x) = |x + 3|$.

Solución

Se parte de la definición de valor absoluto, en la que $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$, se obtienen las siguientes igualdades: $y = x + 3$, $y = -x - 3$, las cuales son dos rectas donde el dominio son los números reales y el rango está dado por $y \in [0, \infty)$

La gráfica que se obtiene es:



2 Obtén la gráfica de $f(x) = \left|\frac{2}{x}\right|$.

Solución

$\frac{2}{x}$, está definido para $x \neq 0$, por tanto el dominio es el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$ o bien

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

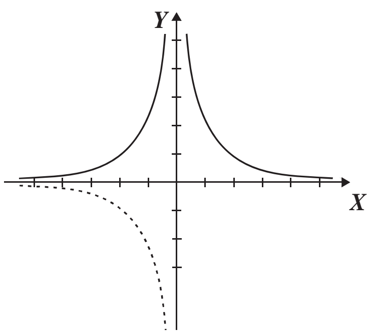
Para el rango se despeja x de las igualdades que se obtienen al aplicar la definición de valor absoluto.

$$y = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{2}{y}, \text{ donde } y \neq 0, \qquad y = -\frac{2}{x} \rightarrow x = -\frac{2}{y}, \text{ donde } y \neq 0$$

También se toma el hecho de que $f(x) > 0$, ya que $\left|\frac{2}{x}\right| > 0$, por tanto el rango es el conjunto $R_f = \{y \in R \mid y > 0\}$ o bien $y \in (0, \infty)$.

La asíntota horizontal es $y = 0$, mientras que la vertical es la recta $x = 0$.

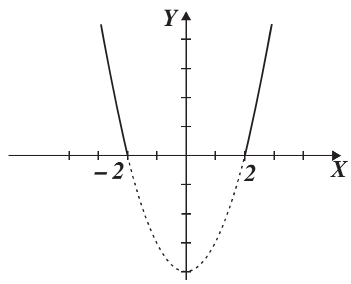
Luego la gráfica que se obtiene es:



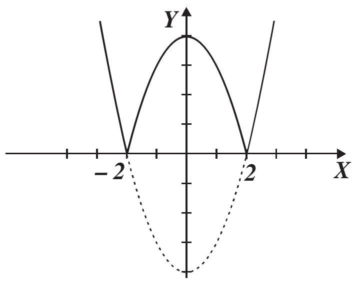
3 Obtén la gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$.

Solución

$y = x^2 - 4$ es una función cuadrática con dominio $x \in R$ y rango $y \in [-4, \infty)$, teniendo como gráfica:



$f(x) \geq 0$, luego el rango de la función es: $y \in [0, \infty)$, por tanto, al hacer positiva la parte donde $x^2 - 4$ es negativa se obtiene la siguiente gráfica:



4 Obtén el dominio, el rango y la gráfica de $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|$

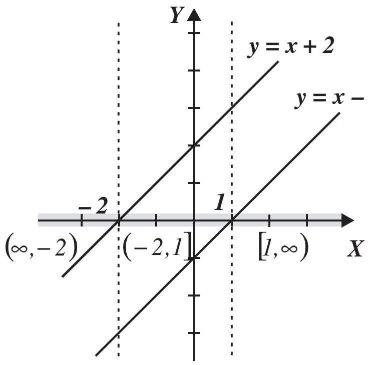
Solución

Dominio: Para $y = \dfrac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$, por tanto el dominio de la función está dado por:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$$

Rango: $f(x) > 0$, por tanto, el rango está dado por $y \in [0, \infty]$, pero al despejar "x" se obtiene $x = \dfrac{1-2y}{y-1}$, entonces $y \neq 1$, por tanto $y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$

Gráfica 1

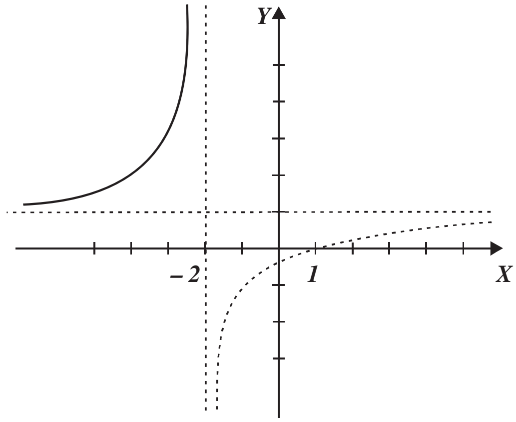


En la gráfica 1 se muestran los intervalos que se analizarán para construir la gráfica que se propone.

i) En el intervalo $(-\infty, -2)$ las rectas $y = x - 1$, $y = x + 2$, toman valores negativos, es decir

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{-(x-1)}{-(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

La porción de gráfica en el intervalo $(-\infty, -2)$ es:



ii) En el intervalo $(-2, 1]$

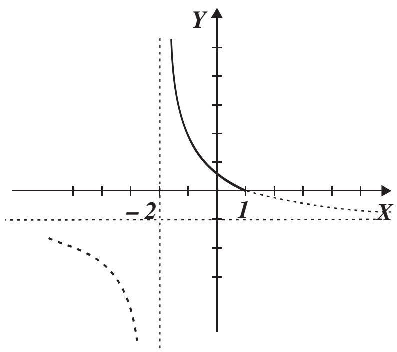
$y = x - 1$ toma valores negativos

$y = x + 2$ los toma positivos

es decir:

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{-(x-1)}{+(x+2)} = \frac{1-x}{x+2}$$

La porción de gráfica es:



iii) En el intervalo $[-1, \infty)$

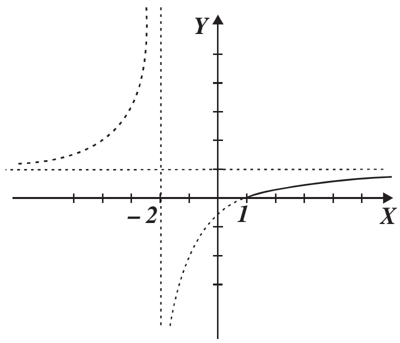
$y = x - 1$, $y = x + 2$

toma valores positivos es decir

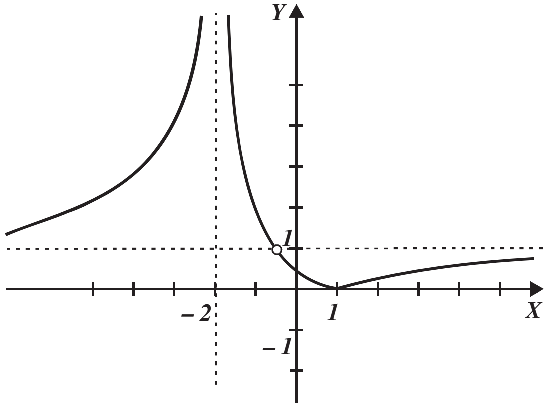
$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{+(x-1)}{+(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

Tiene la misma gráfica que en el caso i)

La porción de gráfica es:



Finalmente, la gráfica es la unión de las porciones de gráfica en cada intervalo.



Nota: En la gráfica aparece un hueco en $y = 1$ ya que el rango es $y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$

Función mayor entero

Tiene la forma: $f(x) = [x]$ con la propiedad de que $[x] = n$ para todo $n \leq x < n + 1$, con $n \in Z$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la gráfica de: $f(x) = [x]$

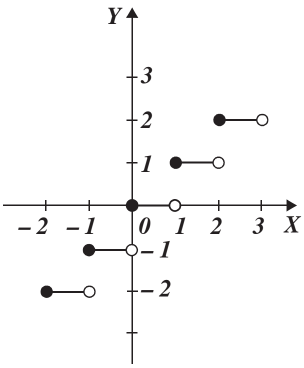
Dominio: $D_f = \{x \mid x \in R\}$

Rango: $R_f = \{y \mid y \in Z\}$

Se toma un subconjunto del dominio por ejemplo $x \in [-2, 3]$ se tiene que:

$$f(x) = [x] = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 3 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

Gráfica:



También recibe el nombre de función escalón.

2 Traza la gráfica de $f(x) = \left[\frac{2}{3}x\right]$

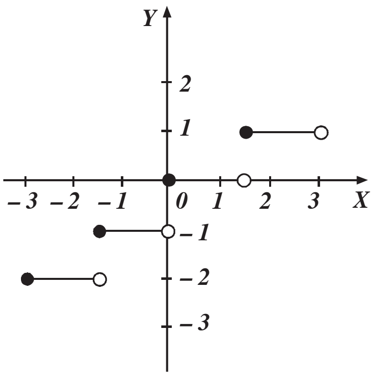
Solución

El dominio y el rango de la función se definen:

$$D_f = \{x \mid x \in R\} \text{ y } R_f = \{y \mid y \in Z\}$$

Se elige el subconjunto del dominio $x \in [-2, 2]$ entonces:

	Longitud del escalón	f(x)
$-2 \leq \frac{2}{3}x < -1$	$-3 \leq x < -\frac{3}{2}$	-2
$-1 \leq \frac{2}{3}x < 0$	$-\frac{3}{2} \leq x < 0$	-1
$0 \leq \frac{2}{3}x < 1$	$0 \leq x < \frac{3}{2}$	0
$1 \leq \frac{2}{3}x < 2$	$\frac{3}{2} \leq x < 3$	1



EJERCICIO 4

Obtén la gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 4$
2. $f(x) = -\dfrac{2}{5}$
3. $f(x) = \pi$
4. $f(x) = 3x + 5$
5. $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$
6. $f(x) = -\dfrac{3}{4}x + 2$
7. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
8. $f(x) = -2x^2 + 12x - 13$
9. $f(x) = 4 - x^2$
10. $y = \dfrac{3}{x}$
11. $f(x) = -\dfrac{1}{x}$
12. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$
13. $y = \dfrac{x-2}{x+4}$
14. $f(x) = \dfrac{x+2}{3-x}$
15. $f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4}$
16. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$
17. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-9}$
18. $f(x) = \sqrt{-x}$
19. $y = \sqrt{x-4}$
20. $y = -\sqrt{9-x}$
21. $y = \sqrt{x^2-36}$
22. $y = \sqrt{16-x^2}$
23. $f(x) = \sqrt{x^2+x-12}$
24. $f(x) = \sqrt{4x^2-9}$
25. $f(x) = \sqrt{\dfrac{900-100x^2}{9}}$
26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$
27. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$
28. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+4}{x-3}}$
29. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$
30. $f(x) = |x|$
31. $f(x) = |x-2|$
32. $f(x) = |x+4|$
33. $f(x) = |x^2-1|$
34. $f(x) = |x^2-4x+3|$
35. $f(x) = |2-x^2|$
36. $f(x) = \left|\dfrac{1}{x-2}\right|$
37. $f(x) = \left|\dfrac{2}{3-x}\right|$
38. $f(x) = \left|\dfrac{x+3}{x-3}\right|$
39. $f(x) = \left|\dfrac{x-3}{x+1}\right|$
40. $f(x) = \left[\dfrac{1}{2}x\right]$
41. $f(x) = \left[\dfrac{5}{3}x\right]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función característica

Son funciones que están seccionadas por intervalos y en cada intervalo se presenta una función distinta. Para graficarla basta con dibujar la gráfica de cada una de las funciones en el intervalo dado.

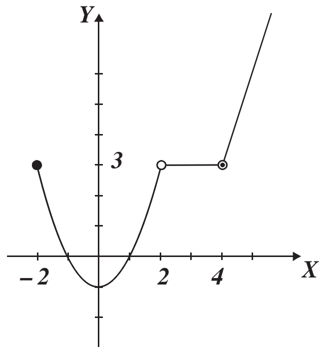
Ejemplo

Obtén la gráfica de:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x < 4 \\ 3x - 9 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Solución

Se tabula cada una de las funciones en el intervalo dado, se localizan los puntos y se grafican, observa que hay puntos que no están incluidos, para esos valores se coloca un círculo abierto.



EJERCICIO 5

Obtén la gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -x + 4 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 3 \\ 0 & \text{si } x < -3 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x} & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \dfrac{|x - 4|}{x - 4}$ Recuerda que $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

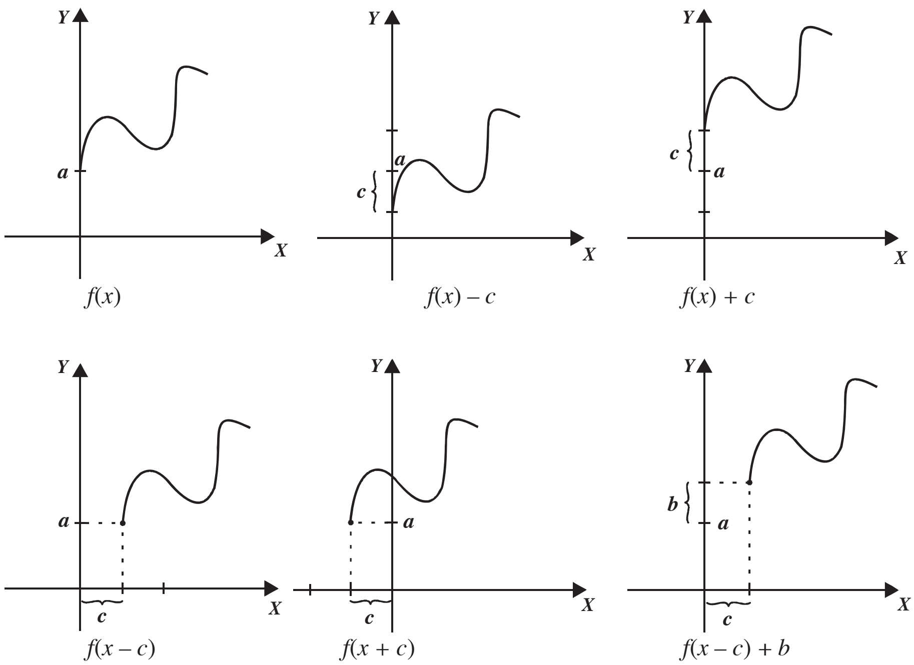
Gráfica de una función a partir de otra conocida

Algunas funciones se grafican a partir de que se conoce la gráfica de otra, a través de desplazamientos, alargamientos o reflexiones de esta última.

Desplazamientos

Sea $f(x)$ una función, $c > 0$ y $b > 0$, si:

a) $y = f(x) + c$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia arriba.
b) $y = f(x) - c$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia abajo.
c) $y = f(x + c)$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la izquierda.
d) $y = f(x - c)$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades a la derecha.
e) $y = f(x + c) + b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la izquierda y b unidades hacia arriba.
f) $y = f(x + c) - b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la izquierda y b unidades hacia abajo.
g) $y = f(x - c) + b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la derecha y b unidades hacia arriba.
h) $y = f(x - c) - b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la derecha y b unidades hacia abajo.



Alargamientos

Sea $f(x)$ una función, $c > 1$, si:

a) $y = cf(x)$, se alarga verticalmente la gráfica de $f(x)$, c veces.

b) $y = \frac{1}{c}f(x)$, se comprime verticalmente la gráfica de $f(x)$, en $\frac{1}{c}$

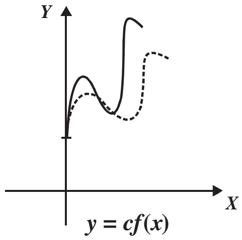
c) $y = f(cx)$, se comprime horizontalmente la gráfica de $f(x)$, c veces.

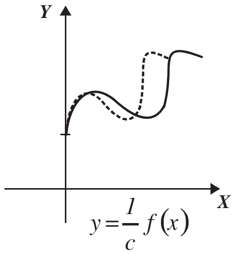
d) $y = f\left(\frac{1}{c}x\right)$, se alarga horizontalmente la gráfica de $f(x)$, en $\frac{1}{c}$

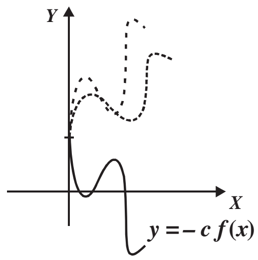
Reflexiones verticales y horizontales

Sea $f(x)$ una función si:

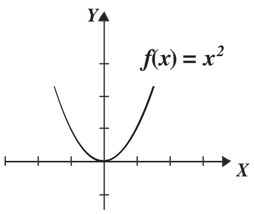
1. $y = -f(x)$, se refleja la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje X.
2. $y = f(-x)$, se refleja la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje Y.

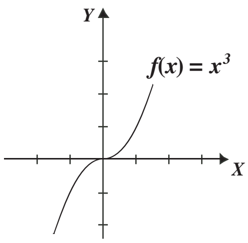


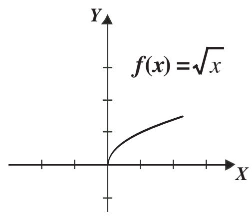


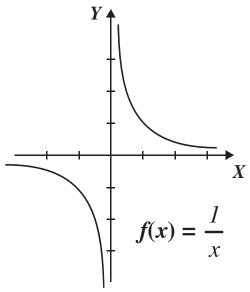


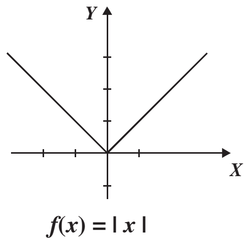
Se tomarán como base las siguientes funciones para graficar otras de la misma forma:











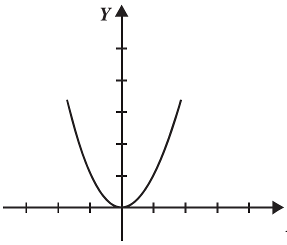
EJEMPLOS

1 Con base en la función $f(x) = x^2$, obtén la gráfica de: $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$,

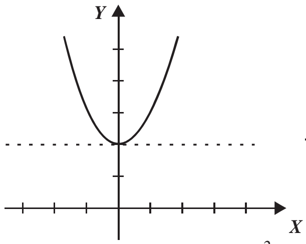
$$y = (x-2)^2,\ y = (x+2)^2,\ y = 2x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = -x^2,\ y = x^2 - 2x - 3$$

Solución

$f(x) = x^2$

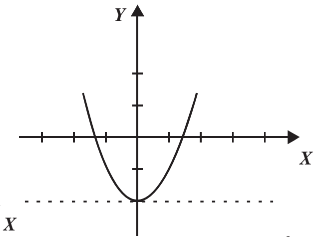


$y = x^2 + 2$



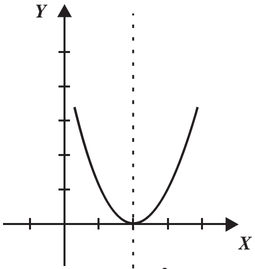
Se desplaza la gráfica $f(x) = x^2$ dos unidades hacia arriba

$y = x^2 - 2$



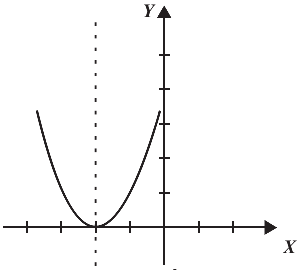
Se desplaza la gráfica $f(x) = x^2$ dos unidades hacia abajo

$y = (x-2)^2$



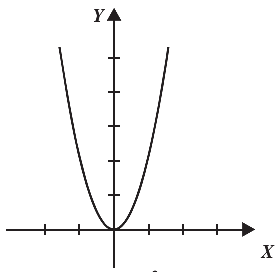
Se desplaza $f(x) = x^2$ dos unidades hacia la derecha

$y = (x+2)^2$



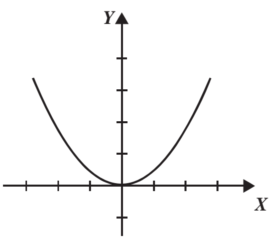
Se desplaza $f(x) = x^2$ dos unidades hacia la izquierda

$y = 2x^2$



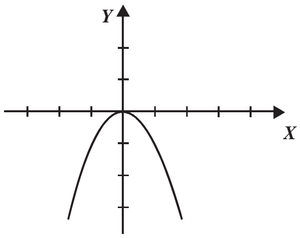
Se alarga $f(x) = x^2$ verticalmente dos veces

$y = \frac{1}{2}x^2$



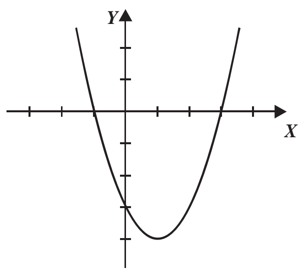
Se comprime $f(x) = x^2$ a la mitad verticalmente

$y = -x^2$



Se refleja $f(x) = x^2$ con respecto al eje X

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$

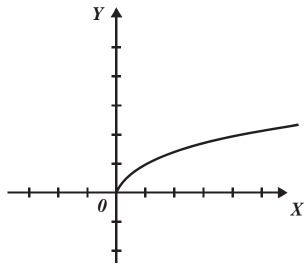


Se desplaza $f(x) = x^2$ hacia la derecha una unidad y baja cuatro unidades

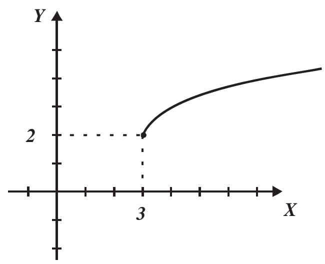
2 Determina la gráfica de $y = \sqrt{x-3} + 2$, a partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$.

Solución

La gráfica de $y = \sqrt{x}$ es:



Para obtener la gráfica de $y = \sqrt{x-3} + 2$, se toma la gráfica de $y = \sqrt{x}$, ésta se desplaza 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba



EJERCICIO 6

Utiliza desplazamientos, alargamientos o reflexiones para obtener la gráfica de las siguientes funciones:

1. $y = x^2 - 4$
2. $y = (x + 3)^2$
3. $y = 1 - x^2$
4. $y = x^2 - 6x + 10$
5. $y = 3x^2 + 12x + 11$
6. $y = -x^3$
7. $y = x^3 + 1$
8. $y = (x - 1)^3 + 2$
9. $y = \frac{1}{2}x^3 - 2$
10. $y = \sqrt{x-2} + 2$
11. $y = \sqrt{x-3} - 2$
12. $y = -\sqrt{x+3}$
13. $y = |x - 3| - 2$
14. $y = 3 - |x + 4|$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones creciente y decreciente

Una función es **creciente** en un intervalo I, si para cualquier $x_1, x_2 \in$ I,

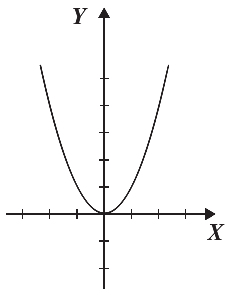
$$f(x_1) < f(x_2) \text{ donde } x_1 < x_2$$

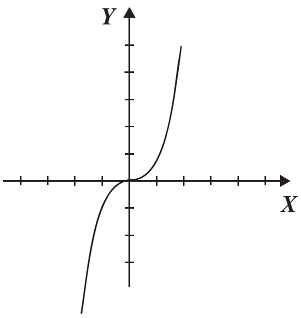
Una función es **decreciente** en un intervalo I, si para cualquier $x_1, x_2 \in$ I,

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ donde } x_1 < x_2$$

Ejemplos

Las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ son:





La función $f(x) = x^2$, es decreciente en el intervalo de $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, \infty)$, mientras que $g(x) = x^3$ es creciente para toda x de su dominio.

EJERCICIO 7

Con las funciones conocidas determina el intervalo donde crecen o decrecen:

1. $f(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = x$
4. $f(x) = |x|$
5. $f(x) = \sqrt{x-2}$
6. $f(x) = -\sqrt{x+3}$
7. $f(x) = 9 - x^2$
8. $f(x) = |x - 3| - 2$
9. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
10. $f(x) = 6$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones inyectiva, suprayectiva y biyectiva

Función inyectiva (uno a uno)

Si $x_1, x_2 \in D_f$ y $x_1 \neq x_2$, f es una función inyectiva si y solo si $f(x_1) \neq f(x_2)$, o dicho de otra forma, $f(x_1) \neq f(x_2)$ si y solo si $x_1 \neq x_2$.

Se determina si la *función es inyectiva* al trazar una recta paralela al eje X sobre la gráfica y si toca un solo punto es inyectiva. También se puede decir que una función inyectiva es aquella que siempre es creciente o siempre decreciente.

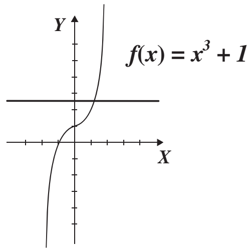
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si la función $f(x) = x^3 + 1$, es inyectiva.

Solución

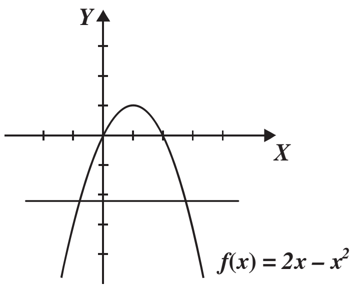
Sean $x_1 \neq x_2$, se tiene que $(x_1)^3 + 1 \neq (x_2)^3 + 1$, ya que no hay números distintos cuyos cubos sean iguales, con este resultado podemos afirmar que la función es inyectiva; por otro lado, si se observa que la gráfica es creciente, por tanto, es inyectiva. Otra forma de saber si la función es inyectiva es trazar cualquier recta paralela al eje X, y ésta debe tocar un solo punto de la gráfica.



2 Determina si la función $f(x) = 2x - x^2$ es inyectiva.

Solución

No es inyectiva, ya que para $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$ se obtiene que $f(x_1) = f(x_2) = -3$, lo que contradice la definición. Luego, si se traza una recta paralela al eje X, se observa que ésta toca dos puntos de la gráfica; por otro lado, no es una función que sea creciente ni decreciente siempre.



Función suprayectiva

Una función $f: A \rightarrow B$ es suprayectiva o sobreyectiva si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$; es decir, para todo elemento de B siempre hay uno de A al cual fue asignado.

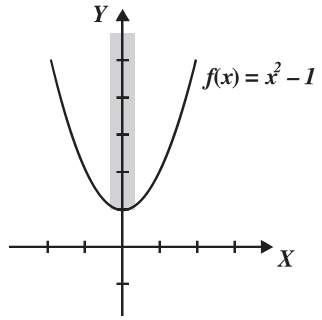
Otra forma de reconocer una función suprayectiva es si su contradominio es igual a su rango. Al menos que se indique lo contrario el contradominio de las funciones dadas serán los números reales.

EJEMPLOS

1 Determina si la función $f(x) = x^2 + 1$ es suprayectiva.

Solución

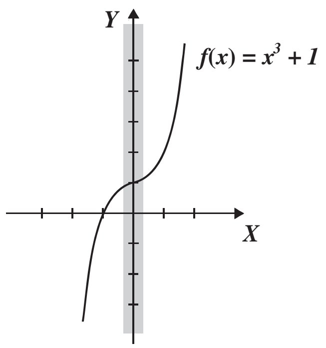
El contradominio de la función es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y su rango el intervalo $[1, \infty)$, por tanto, la función no es suprayectiva.



2 Determina si la función $f(x) = x^3 + 1$ es suprayectiva

Solución

El contradominio de la función es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y su rango el intervalo $(-\infty, \infty)$, por tanto, la función es suprayectiva.



Función biyectiva

Una función "f" es *biyectiva* si es *inyectiva* y *suprayectiva*.

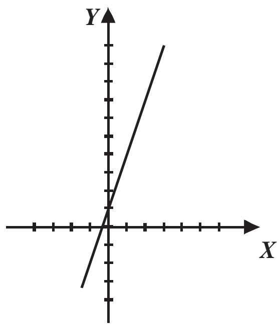
EJEMPLOS

1 Determina si la función $f(x) = 3x + 1$ es biyectiva.

Solución

Es una función siempre creciente, por tanto, es inyectiva. El contradominio de la función es $(-\infty, \infty)$ y su rango $(-\infty, \infty)$ entonces es suprayectiva.

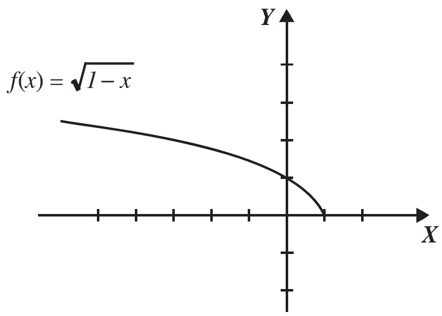
La función es inyectiva y suprayectiva, por tanto, es biyectiva.



2 Determina si la función $f(x) = \sqrt{1-x}$ es biyectiva.

Solución

Gráfica



Si al trazar una recta paralela al eje X interseca a la curva en un punto es inyectiva; no es suprayectiva, ya que su contradominio son los reales y su rango es el intervalo $[0, \infty)$. Es inyectiva pero no suprayectiva, entonces no es biyectiva.

3 Determina si la función $f: (-\infty, 1] \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = \sqrt{1-x}$ es biyectiva.

Solución

La gráfica es la misma de la función del ejemplo anterior, por tanto, la función es inyectiva.

En este caso se especifica el contradominio como el intervalo $[0, \infty)$ el cual es igual al rango, entonces, es suprayectiva.

Es inyectiva y suprayectiva, por consiguiente, es biyectiva.

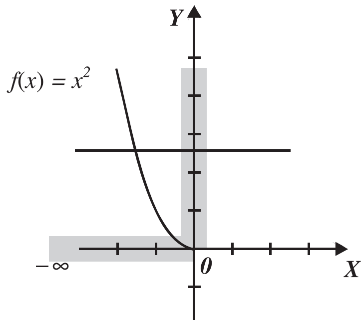
4 Determina si la función $f: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = x^2$ es biyectiva.

Solución

De la gráfica se observa que la función es inyectiva, ya que la recta horizontal sólo toca un punto.

Por otro lado, el contradominio es el intervalo $[0, \infty)$ el cual es igual al rango, por tanto, es suprayectiva.

Por último, es inyectiva y suprayectiva, por consiguiente, es biyectiva.



EJERCICIO 8

Indica cuál de las siguientes funciones es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = 3$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = x^3$
5. $f(x) = x^2, x \in [0, \infty)$
6. $f(x) = x^2 - 7x + 10$
7. $f(x) = 2x - 3$
8. $f(x) = \sqrt{x-3}$
9. $f: R \rightarrow [-1, \infty)$, tal que $f(x) = x^2 - 1$
10. $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = |x|$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones con dominios D_f y D_g respectivamente

- $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $f(x) - g(x) = (f - g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, con dominio: $\{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean las funciones $f(x) = x^2 - 7x + 10$, y $g(x) = x - 5$

Determina

a) $f(x) + g(x)$
b) $f(x) - g(x)$
c) $f(x) \cdot g(x)$
d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Solución

Se obtienen los dominios de f y g para efectuar las operaciones.

$$D_f: (-\infty, \infty), D_g: (-\infty, \infty)$$

a) $f(x) + g(x) = (x^2 - 7x + 10) + (x - 5)$
$= x^2 - 6x + 5$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$
b) $f(x) - g(x) = (x^2 - 7x + 10) - (x - 5)$
$= x^2 - 8x + 15$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$
c) $f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 7x + 10)(x - 5)$
$= x^3 - 7x^2 + 10x - 5x^2 + 35x - 50$
$= x^3 - 12x^2 + 45x - 50$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$
d) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} = \dfrac{(x-5)(x-2)}{x-5} = x - 2$ con, $\{x \in D_f \cap D_g \mid x \neq 5\}$

2 Sean las funciones $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $g(x) = x$ determina: $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Solución

Se obtienen los dominios de las funciones: D_f: $[-3, 3]$, D_g: $(-\infty, \infty)$ y se realizan las operaciones.

$f(x) + g(x) = \sqrt{9 - x^2} + x$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$f(x) - g(x) = \sqrt{9 - x^2} - x$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$f(x) \cdot g(x) = \sqrt{9 - x^2} \cdot x = x\sqrt{9 - x^2}$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$, con dominio: $\{x \in [-3, 3] | x \neq 0\}$ o bien $x \in [-3, 0) \cap (0, 3]$

3 Sean $f = \{(2, 3), (3, -1), (4, -5), (5, -9)\}$ y $g = \{(1, 2), (2, 5), (3, 8), (7, 10)\}$, determina $f + g$

Solución

Los dominios son $D_f = \{2, 3, 4, 5\}$ y $D_g = \{1, 2, 3, 7\}$, entonces $D_{f+g} = \{2, 3\}$, para calcular $f(x) + g(x)$ se sustituyen los valores del dominio de la suma.

$$f(2) + g(2) = 3 + 5 = 8$$
$$f(3) + g(3) = -1 + 8 = 7$$

Por tanto, $f(x) + g(x) = \{(2, 8), (3, 7)\}$

EJERCICIO 9

Para las siguientes funciones determina:

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)\cdot g(x) \text{ y } \frac{f(x)}{g(x)}$$

1. $f(x)=5,\ g(x)=-2$
2. $f(x)=2x-5,\ g(x)=2x+5$
3. $f(x)=x^2-4x-5,\ g(x)=x^2+3x+2$
4. $f(x)=\dfrac{2x-1}{2},\ g(x)=\dfrac{x+2}{3}$
5. $f(x)=\sqrt{x-3},\ g(x)=\sqrt{x+4}$
6. $f(x)=x+\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt{x}$
7. $f(x)=\operatorname{sen}^2 x,\ g(x)=\cos^2 x$
8. $f=\{(-1,2),(0,3),(1,4),(3,6),(5,7)\},\ g=\{(-3,6),(-2,8),(-1,10),(2,12),(3,14),(5,16),(6,18)\}$
9. $f=\{(-2,-5),(-1,-3),(0,-1),(1,1),(2,3)\},\ g=\{(-5,8),(-4,7),(-3,6),(-2,5),(-1,4),(0,3)\}$
10. $f=\left\{\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right),(-1,-1),(1,1),\left(2,\dfrac{1}{2}\right),\left(3,\dfrac{1}{3}\right)\right\},\ g=\left\{(-1,2),(1,0),\left(2,\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

Dadas las funciones:

$$f(x)=x+3,\ g(x)=x^2+5x+6,\ r(x)=x+2,\ s(x)=x^2-3x-10$$

Determina:

11. $f(x)+r(x)$
12. $f(x)-s(x)$
13. $g(x)\cdot s(x)$
14. $\dfrac{g(x)}{r(x)}$
15. $\dfrac{s(x)}{r(x)}$
16. $g(x)-s(x)$
17. $f(x)\cdot r(x)$
18. $\dfrac{f(x)}{r(x)}$
19. $\dfrac{g(x)}{s(x)}$
20. $\dfrac{g(x)}{f(x)}+\dfrac{s(x)}{r(x)}$

Dadas las funciones:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+2},\ g(x)=\frac{1}{x} \text{ y } h(x)=\frac{1-x}{3-x}, \text{ determina:}$$

21. $f(x)+g(x)$
22. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
23. $f(x)\cdot g(x)$
24. $f(x)-h(x)$
25. $g(x)\cdot h(x)$
26. $\dfrac{f(x)}{g(x)}+h(x)$

27. $\dfrac{h(x)}{f(x)} - g(x)$

28. $\dfrac{h(2)-f(1)}{g(3)}$

29. $f(x+1)\cdot\dfrac{1}{h(x+1)}$

30. $h(x) - g(x)$

31. $\dfrac{h(x)}{g(x)} - \dfrac{g(x)}{f(x)}$

32. $f(x)\cdot h(x) - g(x)$

33. $\dfrac{f(x)+h(x)}{g(x)}$

34. $\dfrac{1}{g(x)+h(x)}$

35. $\dfrac{1}{1-h(x)}$

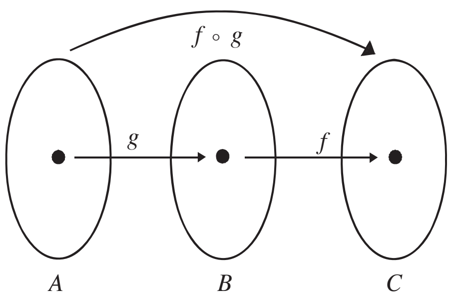
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función composición (Función de funciones)

Sean f y g funciones cualesquiera que definen una nueva función, la cual recibe el nombre de función composición de f con g y se denota con:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

y es la función cuyo dominio son los elementos del dominio de g, tal que $g(x)$ pertenece al dominio de f; es decir, $D_{f \circ g}$: $\{x \mid x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ y $g = \{(3, 1), (-1, 3), (-5, 5), (-9, 2)\}$, determina $f \circ g$.

Solución

Se determinan los pares ordenados de la función g, de tal manera que el segundo término sea el primer término de los pares ordenados de la función f. Los primeros términos, de cada par ordenado encontrado, forman el dominio de la función composición.

Los pares ordenados de g que cumplen con la condición son:

$$(3, 1), (-1, 3), (-5, 5)$$

Por tanto, el dominio de la función composición es:

$$D_{fog} : \{-5, -1, 3\}$$

El dominio se evalúa de la siguiente manera:

Por definición $f \circ g = f(g(x))$, entonces el conjunto solución son todas las parejas ordenadas de la forma: $(x, f(g(x)))$

$$f(g(-5)) = f(5) = 6$$

$$f(g(-1)) = f(3) = 4$$

$$f(g(3)) = f(1) = 2$$

Finalmente el conjunto es:

$$f \circ g = \{(-5, 6), (-1, 4), (3, 2)\}$$

2 Determina $f \circ g$; $g \circ f$; $f \circ f$; $g \circ g$, para $f(x) = x + 3$, $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

$$f \circ g = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x}{x-1} + 3 = \frac{x+3(x-1)}{x-1} = \frac{4x-3}{x-1}$$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x + 3) = \frac{x+3}{(x+3)-1} = \frac{x+3}{x+2}$$

$$f \circ f = f(f(x)) = f(x + 3) = (x + 3) + 3 = x + 6$$

$$g \circ g = g(g(x)) = g\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1} = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-(x-1)}{x-1}} = \frac{x(x-1)}{1(x-1)} = x$$

Para determinar $f \circ g \circ h$ se aplica primero h, después g y, por último, f

3 Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ y $h(x) = x - 4$, determina $f \circ g \circ h$.

Solución

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x-4)) = f(2(x-4)-1) = f(2x-8-1) = f(2x-9)$$
$$= (2x-9)^2 = 4x^2 - 36x + 81$$

4 Si $F(x) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$, determina f, g y h tal que $F = f \circ g \circ h$

Solución

$F(x) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$, la función dice suma 4, eleva al cuadrado, resta 5 y obtén la raíz.

Entonces se tiene que:

$$h(x) = x + 4 \qquad g(x) = x^2 - 5 \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

De tal forma que $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x+4)) = f((x+4)^2 - 5) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$

EJERCICIO 10

Determina $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ para las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ y $g(x) = 2x - 3$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$
3. $f(x) = 4$ y $g(x) = 2$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
5. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = \log(x - 2)$ y $g(x) = x - 2$
8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
9. $f(x) = \{(2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)\}$ y $g(x) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
10. $f(x) = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$ y $g(x) = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4)\}$
11. $f(x) = \{(0, 1), (1, 3), (-1, -1), (-2, -3)\}$ y $g(x) = \{(3, 0), (-2, -2), (1, -1)\}$

Encuentra f de manera que $(f \circ g)(x) = F(x)$

12. $g(x) = \dfrac{3-x}{1-x}$ y $F(x) = \dfrac{1-x}{3-x}$
13. $g(x) = x - 1$ y $F(x) = \sqrt{x - 1}$
14. $g(x) = x^3$ y $F(x) = mx^3 + b$

15. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $F(x) = x^2 - 1$

16. $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y $F(x) = \sqrt{\dfrac{1-2x}{x}}$

Determina $f \circ g \circ h$

17. $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ y $h(x) = 3x - 1$

18. $f(x) = x^3$, $g(x) = 1 - x$ y $h(x) = 4x^2$

19. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x - 5$ y $h(x) = x - 2$

20. $f(x) = x^2$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $h(x) = x - 2$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $h(x) = \cos x$

22. $f(x) = \log x$, $g(x) = 10^x$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones par e impar

- Se dice que una función f es par si: $f(-x) = f(x)$.
- Se dice que una función f es impar si: $f(-x) = -f(x)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 $f(x) = x^2 - 4$ es función par, ya que

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x).$$

2 $f(x) = 3x^3 + 4x$ es función impar ya que:

$$f(-x) = 3(-x)^3 + 4(-x) = -3x^3 - 4x = -(3x^3 + 4x) = -f(x)$$

3 $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ no es par ni impar, ya que:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 - 5(-x) + 2 = -x^3 - x^2 + 5x + 2 = -(x^3 + x^2 - 5x - 2)$$

$$f(-x) \neq f(x) \quad \text{y} \quad f(-x) \neq -f(x)$$

Observaciones:

Si f y g son funciones pares y h y r funciones impares, entonces se cumple:

I. $f \cdot g$ es par

II. $f \cdot h$ es impar

III. $h \cdot r$ es par

EJERCICIO 11

Indica si f es par, impar o ninguna.

1. $f(x) = x^2 - x$
2. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = -x^2 + 2x - 4$
5. $f(x) = (x - 2)^3$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
8. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
9. $f(x) = (x + 1)^2 + x^3$
10. $f(x) = x^3 - 2x$
11. $f(x) = x^4 - 2x^2$
12. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
13. $f(x) = 3x^5 - 2x$
14. $f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$
15. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función inversa

Sea f una función inyectiva con dominio A y contradominio B; la función g que satisface $f(g(x)) = x$, se llama *función inversa* de f y se denota $f^{-1}(x)$ con dominio B y contradominio A.

EJEMPLOS

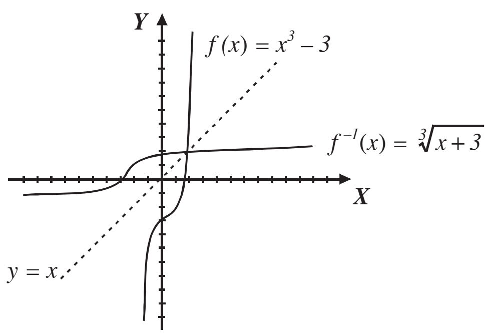
1 Determina la función inversa de $f(x) = x^3 - 3$.

Solución

$f(x) = x^3 - 3$

Al emplear la definición

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad (f^{-1}(x))^3 - 3 = x \qquad (f^{-1}(x))^3 = x + 3 \qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+3}$$



Observa que $f^{-1}(x)$ es un reflejo de $f(x)$ sobre la función identidad $y = x$.

Comprobación:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[3]{x+3}\right) = \left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3 - 3 = x + 3 - 3 = x$$

Otra forma de obtener la función inversa es resolver la ecuación para x dejándola en términos de y, se intercambia x por $f^{-1}(x)$, y por x.

2 Determina la función inversa de $f(x) = 3x - 12$

Solución

$f(x) = 3x - 12 \rightarrow y = 3x - 12 \rightarrow y + 12 = 3x \rightarrow \dfrac{y}{3} + 4 = x$

Se intercambia y por x, x por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3} + 4$

Comprobación:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{3}+4\right) = 3\left(\frac{x}{3}+4\right) - 12 = x + 12 - 12 = x$$

3 Determina la función inversa de $f(x) = x^2$

Solución

La función no es inyectiva, por tanto, no tiene inversa.

Propiedades

Si f es una función con inversa f^{-1}, entonces

- El dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de f.
- $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$
- f^{-1} es invertible y su inversa es f.
- Si f es una función real entonces la gráfica de f^{-1} es el reflejo de f sobre la función $y = x$

EJERCICIO 12

Determina la función inversa (si es posible) para las siguientes funciones:

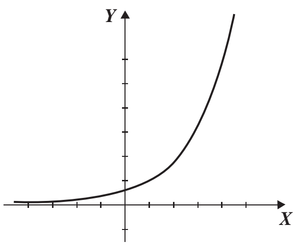
1. $f(x) = x$
2. $f(x) = 2x - 5$
3. $f(x) = x^2 - 9$, $x \in [0, \infty)$
4. $f(x) = x^2 + 3x + 2$
5. $f(x) = x^3$
6. $f(x) = x^5$
7. $f(x) = x^4$, $x \in [0, \infty)$
8. $f(x) = \sqrt{3 - x}$
9. $f(x) = (2x - 5)^2$
10. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0, 2]$
11. $f(x) = \sqrt[3]{x + 9}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{2x + 3}$
13. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in [1, \infty)$
14. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$
15. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x - 1}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

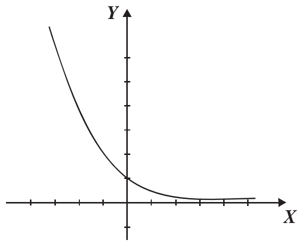
Funciones trascendentes

Función exponencial

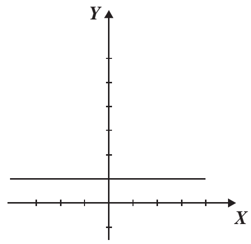
Es una función de la forma $f(x) = a^x$, con dominio $D_f : x \in (-\infty, \infty)$ y rango $y \in (0, \infty)$ (si $a = 1$, entonces el rango es $\{1\}$) y básicamente existen tres tipos:



$f(x) = a^x,\ a > 1$



$f(x) = a^x,\ 0 < a < 1$



$f(x) = 1^x$

EJEMPLOS

Ejemplos

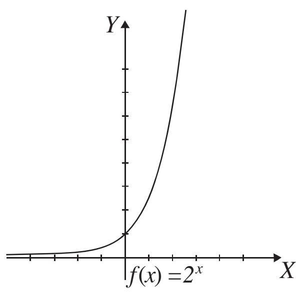
1 Obtén las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$:

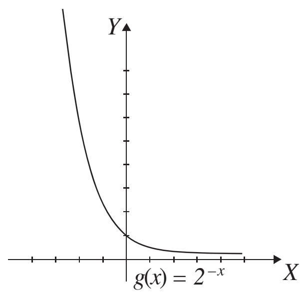
Solución

Se hace una tabulación para cada gráfica y se obtiene:

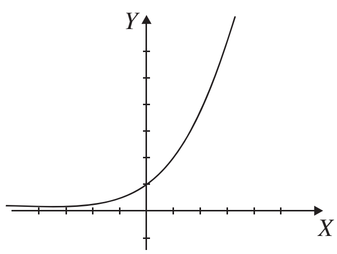
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g(x) = 2^{-x}$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$





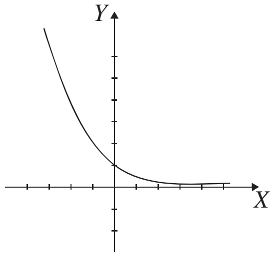
Una de las funciones exponenciales más comunes es: $f(x) = e^x$, con $e \approx 2.71828$



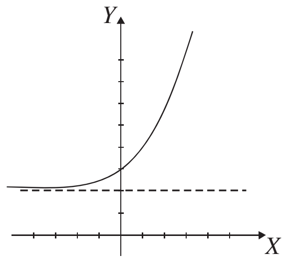
2 Obtén las gráficas de $y = e^{-x}$, $y = e^{x} + 2$, $y = \dfrac{2}{3}e^{x}$, $y = -e^{x}$, $y = -e^{-x}$

Solución

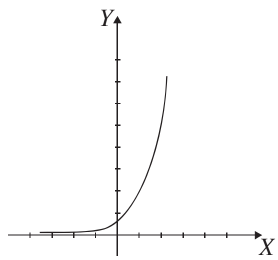
Mediante reflexiones, desplazamientos y alargamientos de una función se obtienen las siguientes gráficas:



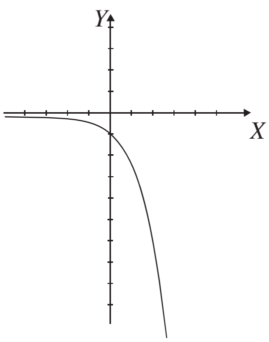
$y = e^{-x}$



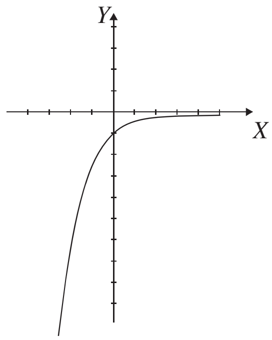
$y = e^{x} + 2$



$y = \dfrac{2}{3}e^{x}$



$y = -e^{x}$



$y = -e^{-x}$

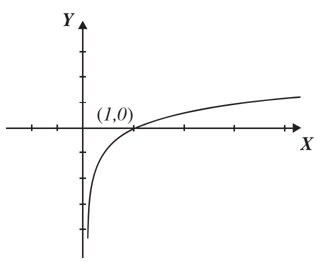
La *función exponencial* $f(x) = a^{x}$ es inyectiva (ya que es creciente), por tanto, debe tener inversa, la cual es el logaritmo con base a. Un logaritmo se define como el exponente al que se eleva un número llamado base, para obtener cierto número, de tal forma que aplicado a la función exponencial queda:

$$y = a^{x} \text{ entonces } \log_a y = x,\ y > 0, \text{ por tanto } f^{-1}(x) = \log_a x$$

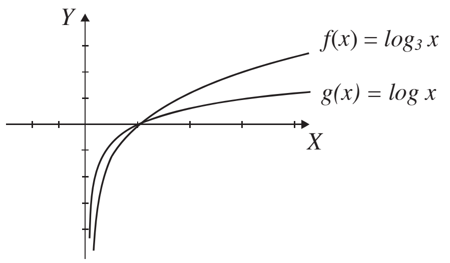
De lo anterior, se define la *función logarítmica* como:

$$g(x) = \log_a x \quad \text{Dominio: } x \in (0, \infty), \text{ Rango: } x \in (-\infty, \infty)$$

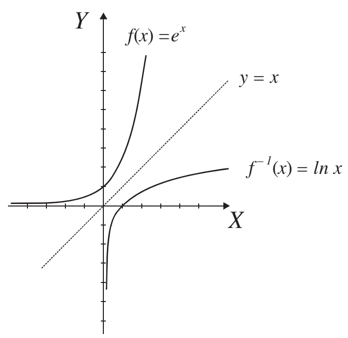
Gráfica:



Pasa por el punto (1, 0), porque $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$, es creciente y tiene una asíntota vertical en $x = 0$
Por ejemplo, las gráficas de las funciones: $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = \log x$ son:



Por otro lado $\ln x = \log_e x$, por tanto, si $f(x) = e^x$ entonces $f^{-1}(x) = \ln x$



EJEMPLOS

Ejemplos

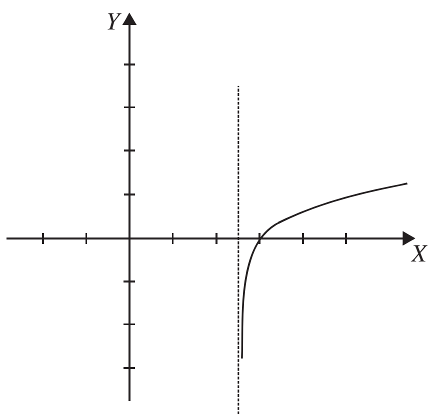
1 Determina la gráfica de $y = \log(2x - 5)$.

Solución

Se determina el dominio; recuerda que $\log_b N = a$, entonces $N > 0$:

$$2x - 5 > 0 \rightarrow x > \frac{5}{2} \rightarrow x \in \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$$

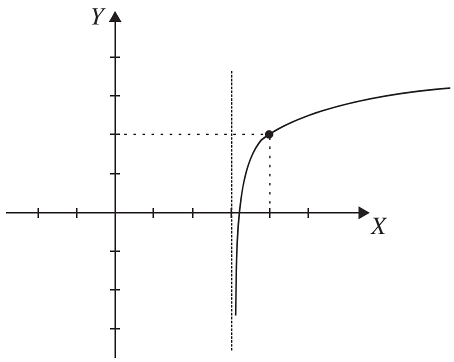
Se traza una asíntota en $x = \frac{5}{2}$ y se desplaza la gráfica $y = \log_{10} x$



2 Determina la gráfica de $y = \log(x - 3) + 2$.

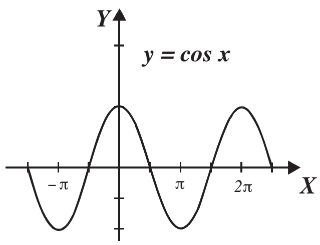
Solución

Se desplaza la gráfica de $y = \log x$ dos unidades hacia arriba y tres a la izquierda

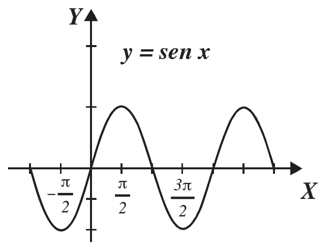


Funciones trigonométricas

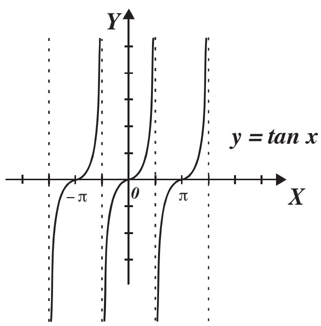
Para la gráfica de las siguientes *funciones trigonométricas* se utilizarán por convención valores en radianes para x.



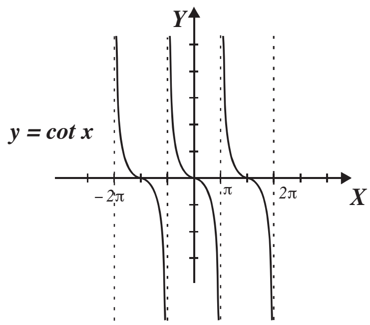
Dominio: $x \in (-\infty, \infty)$
Rango: $y \in [-1, 1]$



Dominio: $x \in (-\infty, \infty)$
Rango: $y \in [-1, 1]$

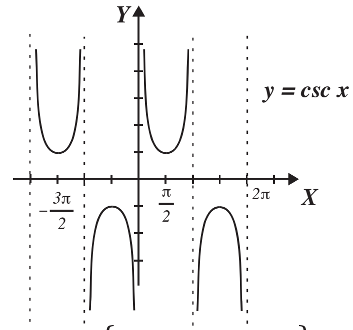


Dominio: $\left\{x \in R \,\middle|\, x \neq \frac{(2n-1)\pi}{2}, n \in Z\right\}$
Rango: $y \in (-\infty, \infty)$

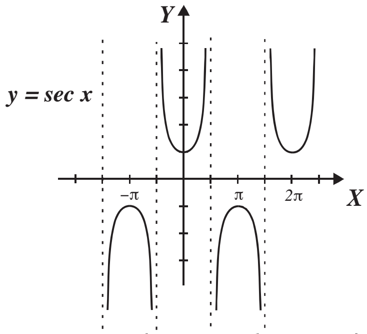


Dominio: $\left\{x \in R \,\middle|\, x \neq n\pi, n \in Z\right\}$
Rango: $y \in (-\infty, \infty)$

Las relaciones $y = \csc x$, $y = \sec x$



Dominio: $\{x \in R \mid x \neq n\pi, n \in Z\}$
Rango: $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



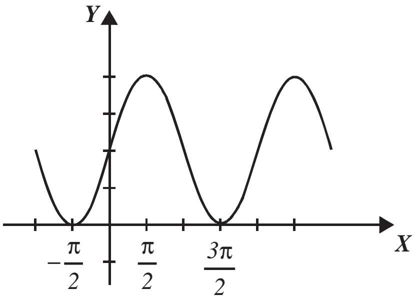
Dominio: $\left\{x \in R \mid x \neq \frac{1}{2} n\pi, n \in Z\right\}$
Rango: $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Ejemplo

Determina la gráfica de $y = 2 \text{ sen } x + 2$

Solución

La función $f(x) = \text{sen } x$ se alarga 2 unidades verticalmente y se desplaza dos unidades hacia arriba, obteniendo la siguiente gráfica:



EJERCICIO 13

Obtén la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3^x$
2. $y = 3^{-x}$
3. $y = 3^x - 3$
4. $f(x) = e^x + 1$
5. $f(x) = 1 - e^x$
6. $f(x) = e^{-x} + 2$
7. $f(x) = \ln(x - 2)$
8. $f(x) = 1 + \log x$
9. $f(x) = 2 + \ln(x + 1)$
10. $f(x) = 3 \cos x - 2$
11. $f(x) = -2 \text{ sen } x + 1$
12. $f(x) = -\tan x$
13. $f(x) = -2 \sec x + 1$
14. $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Las funciones como modelos matemáticos

Como se afirmó al principio del capítulo, las funciones representan modelos para resolver problemas de la vida real.

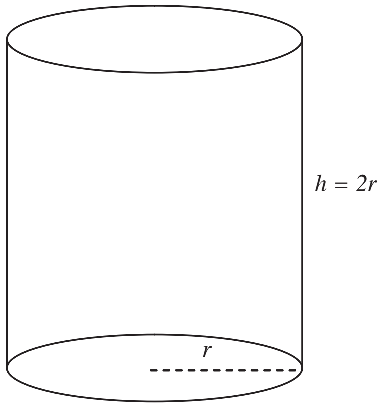
EJEMPLOS

1 La altura de un recipiente cilíndrico es el doble que el radio de su base, expresa el volumen del cilindro en función de su altura.

Solución

El volumen de un cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$



Puesto que la altura es el doble del radio de la base, entonces:

$$h = 2r \rightarrow r = \frac{h}{2}$$

Al sustituir $r = \frac{h}{2}$ en el volumen se obtiene:

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \pi\frac{h^2}{4} h = \frac{\pi h^3}{4}$$

Por consiguiente

$$V(h) = \frac{\pi h^3}{4}$$

2 El perímetro de un rectángulo es de 26 unidades, expresa el área del rectángulo en función de su largo.

Solución

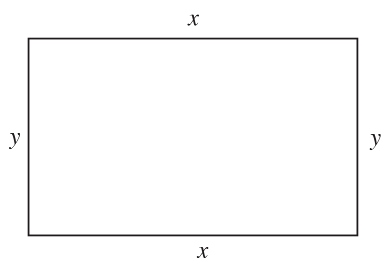
Se establecen las dimensiones del rectángulo:

$$x\text{: largo, } y\text{: ancho}$$

El perímetro es

$$2x + 2y = 26 \rightarrow x + y = 13$$

$$y = 13 - x$$



El área del rectángulo es

$$A = xy$$

Al sustituir $y = 13 - x$, se obtiene:

$$A = x(13 - x) = 13x - x^2$$

Por consiguiente,

$$A(x) = 13x - x^2$$

3 Una persona tiene una pared de piedra en un costado de un terreno. Dispone de 1 600 m de material para cercar y desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados. Expresa el área del corral en términos del ancho de éste.

Solución

Sean x y y las dimensiones del corral donde,

x: ancho del corral, y: largo del corral

Entonces,

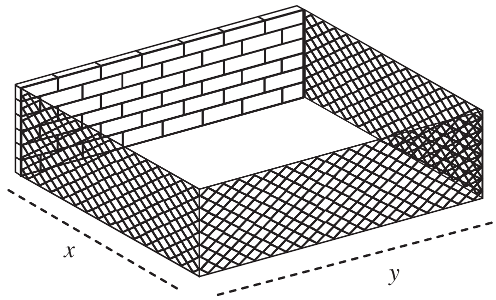
$$2x + y = 1\,600 \rightarrow y = 1\,600 - 2x$$

el área del rectángulo está dada por:

$$A = xy$$

Al sustituir $y = 1\,600 - 2x$, se obtiene:

$$A(x) = x(1\,600 - 2x) = 1\,600x - 2x^2$$



4 Un globo asciende desde un punto con velocidad constante de $1.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a 30 m del punto del despegue se encuentra una casa. Si t es el tiempo en segundos, expresa la distancia que existe entre la casa y el globo en función del tiempo.

Solución

Sea $v = \frac{d}{t}$, entonces $d = vt$, donde, d es la distancia, v la velocidad, t el tiempo.

Al transcurrir t segundos el globo sube $1.5\,t$ en metros; entonces se aplica el teorema de Pitágoras para obtener:

$$d^2 = (1.5\,t)^2 + (30)^2 \rightarrow d^2 = \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + (30)^2$$

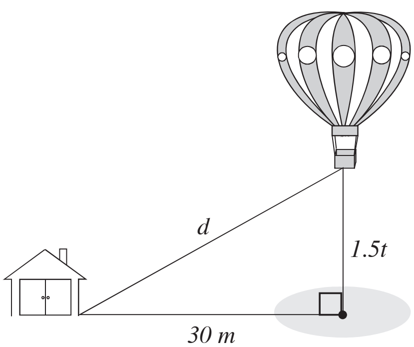
$$d^2 = \frac{9}{4}t^2 + 900$$

$$d = \sqrt{\frac{9t^2 + 3\,600}{4}}$$

$$d = \frac{3}{2}\sqrt{t^2 + 400}$$

Por tanto:

$$d(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t^2 + 400}$$



EJERCICIO 14

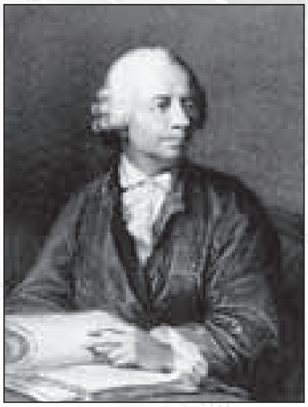
1. El área de la base de un cilindro es de $40\ \pi\ m^2$. Expresa el volumen en función de la altura.
2. Fluye agua por un tanque cónico de 10 m de radio y 25 m de altura. Cuando el nivel del agua está a una altura de h y radio r, expresa el volumen del agua en función de la altura.
3. Si el ancho de un rectángulo es la quinta parte de su largo, determina el perímetro en función de su área.
4. Dada una circunferencia de radio r, precisa el área de la circunferencia en función de su diámetro d.
5. Se inscribe un cubo de arista x en una esfera de radio r. Expresa el volumen de la esfera en función de la arista del cubo.
6. Al graficar la recta, cuya ecuación es $3x - 2y + 6 = 0$, y trazar una línea vertical paralela al eje Y en cualquier punto sobre el eje X se genera un triángulo rectángulo. Expresa el área de dicho triángulo en función de la abscisa x.
7. Se desea construir un tanque de gas en forma de cilindro circular recto de 2.5 m de altura y a cada extremo del cilindro van unidas dos semiesferas de radio r. Expresa el volumen del tanque en función de r.
8. Se inscribe un triángulo equilátero de lado x en una circunferencia de radio r. Expresa el área de la circunferencia en función del lado x.
9. Se inscribe un rectángulo en una elipse cuya ecuación es $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$. Precisa el área del rectángulo en función de la abscisa x.
10. Un cartel de base x y altura y tiene un área de $540\ cm^2$ con márgenes de 2 cm a los lados y 1.5 cm en las partes superior e inferior. Expresa el área impresa en función de la base del cartel.
11. Desde cierto puente de la Ciudad de México un peatón observa un automóvil que viaja a 18 m/s en una avenida perpendicular al puente peatonal. Si t es el tiempo en segundos, determina la distancia entre el peatón y el automóvil en función del tiempo, si la altura del puente es de 4.5 m.
12. Una lancha es remolcada con un cable hacia un muelle. El cable es enrollado a razón de 0.5 m/s y la lancha se encuentra a 2 m por debajo del nivel del muelle. Si t es el tiempo en segundos, expresa la distancia que le falta recorrer a la lancha hacia el muelle en función del tiempo.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 2

LÍMITES

Reseña HISTÓRICA



El número *e*

El número *e* llega por primera vez a las matemáticas de forma muy discreta. Sucedió en 1618 cuando, en un apéndice al trabajo de Napier sobre logaritmos, apareció una tabla dando el logaritmo natural de varios números.

Briggs dio una aproximación numérica al logaritmo base diez de *e* sin mencionar a *e* específicamente en su trabajo.

En 1647 Saint-Vincent calculó el área bajo una hipérbola rectangular, pero no encontró la conexión con los logaritmos, en 1661 Huygens comprendió la relación entre la hipérbola rectangular y el logaritmo. Examinó explícitamente la relación entre el área bajo la hipérbola rectangular $yx = 1$ y el logaritmo.

La notación *e* aparece por primera vez en una carta que le escribió Euler a Goldbach en 1731. Euler hizo varios descubrimientos respecto a *e* en los años siguientes pero no fue sino hasta 1748 cuando Euler dio un tratamiento completo a las ideas alrededor de *e*.

Demostró que:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Euler dio una aproximación de *e* con 18 decimales,

$$e = 2.718281828459045235$$

Leonhard Euler
(1707-1783)

Definición intuitiva de límite

Si al aproximar x lo suficientemente cerca de un número a (sin ser a) tanto del lado izquierdo como del derecho, $f(x)$ se aproxima a un número L, entonces el límite cuando x tiende al número a es L. Esto lo escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Donde la notación $x \to a$ se lee "x tiende a a", para decir que: "tiende a a por la izquierda" se utiliza $x \to a^-$, para decir que: "x tiende a a por la derecha" utilizamos $x \to a^+$, de tal forma que:

Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Es decir, si los límites laterales existen y tienden a un mismo número L entonces el límite cuando tiende al número a es L. Para que el límite exista no se necesita que la función esté definida para el número a, basta que esté definida para valores muy cercanos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el límite cuando x tiende a 3 de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

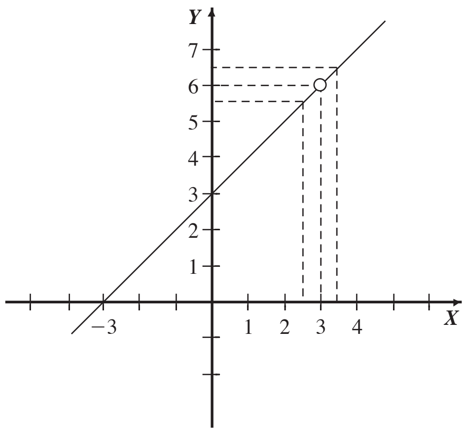
Solución

La función no está definida para $x = 3$, sin embargo, podemos evaluar la función en valores muy cercanos por la izquierda y por la derecha. Por otro lado graficaremos la función utilizando la simplificación:

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x + 3$$

es decir, graficamos la recta $f(x) = x + 3$ con la restricción $x \neq 3$ donde se formará un hueco.

x	f(x)
2.9	5.9
2.99	5.99
2.999	5.999
2.9999	5.9999
3.0001	6.0001
3.001	6.001
3.01	6.01
3.1	6.1



Se observa que para valores de x muy cercanos a 3 por la izquierda (2.9, 2.99, 2.999, 2.9999), $f(x)$ tiende a 6, lo mismo pasa para valores cercanos por la derecha (3.0001, 3.001, 3.01, 3.1), es decir:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 6 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$$

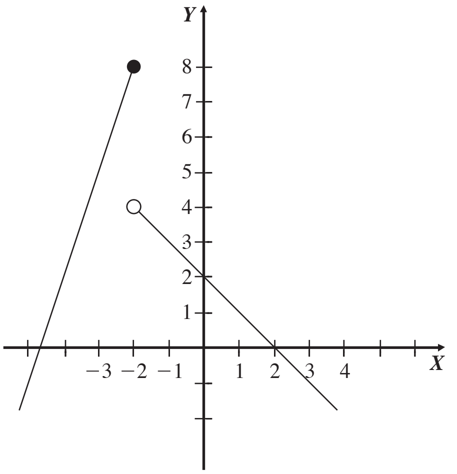
por tanto $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

2 Si $f(x) = \begin{cases} 3x+14 & \text{si } x \leq -2 \\ -x+2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ determina $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

Solución

Graficamos la función y evaluamos en valores muy cercanos a 2.

x	f(x)
−2.1	7.7
−2.01	7.97
−2.001	7.997
−1.999	3.999
−1.99	3.99
−1.9	3.9



Aquí tenemos que: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 8$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4$

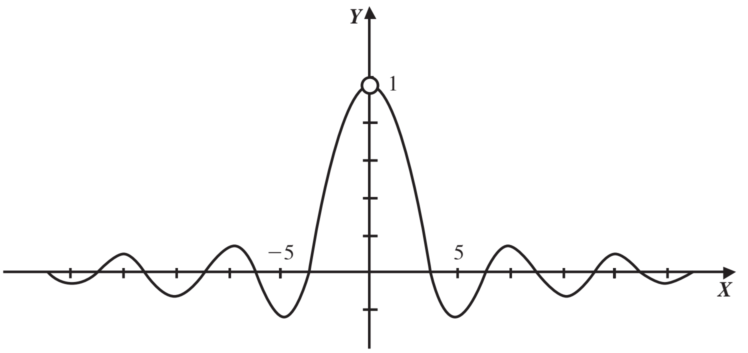
entonces $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ por tanto $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe

3 Determina $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$

Solución

Evaluamos con valores muy cercanos a 0 por la izquierda y por la derecha. Observe que la función no está definida en $\theta = 0$ y que los valores serán tomados como radianes.

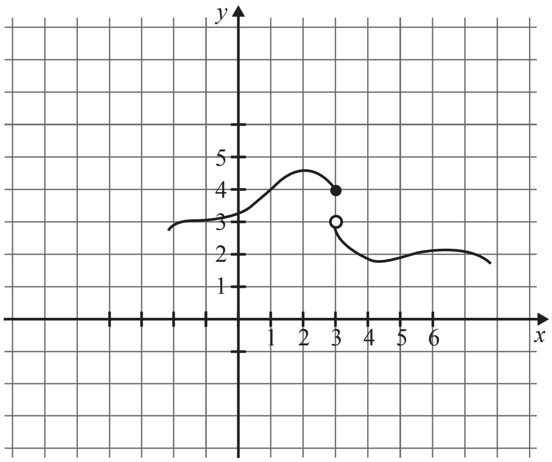
θ	f(θ)
−0.005	0.999995833
−0.004	0.99999733
−0.003	0.9999985
−0.001	0.999999833
0.001	0.999999833
0.003	0.9999985
0.004	0.99999733
0.005	0.999995833



Tenemos: $\lim\limits_{\theta\to 0^-} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$ y $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$

entonces $\lim\limits_{\theta\to 0^-} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$ por tanto $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$

4 Para la función $f(x)$ mostrada en la figura determina: *a*) $\lim_{x\to 1} f(x)$ y *b*) $\lim_{x\to 3} f(x)$



Solución

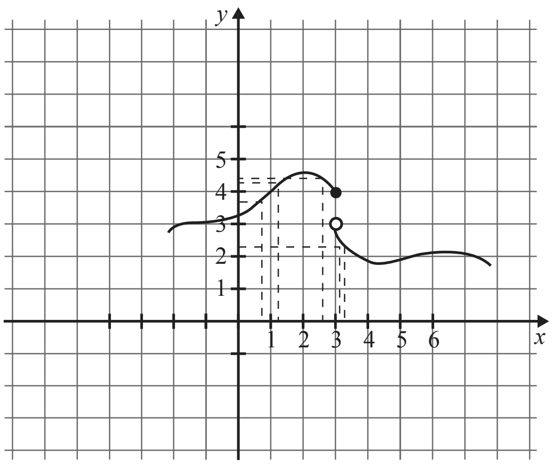
a) Calculamos los límites por la izquierda y derecha

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$

los límites laterales son iguales por tanto $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$

b) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$

los límites laterales son diferentes, por tanto $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe



EJERCICIO 15

Utilizando una tabla con valores muy cercanos al valor que tiende el límite, calcula:

1. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 1)$

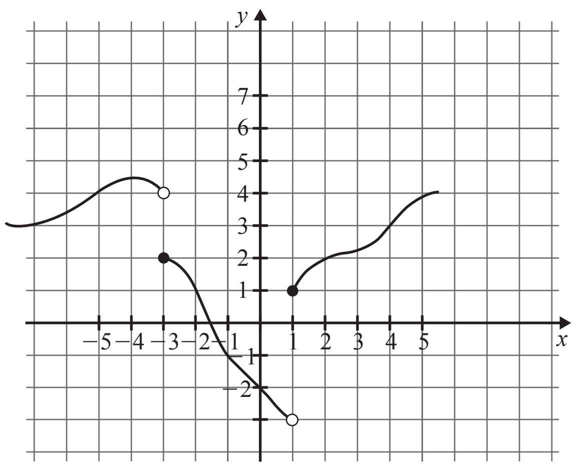
2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$

La gráfica de una función $f(x)$ es la siguiente:



De acuerdo con ella determina:

6. $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$

7. $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

8. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

9. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

10. $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

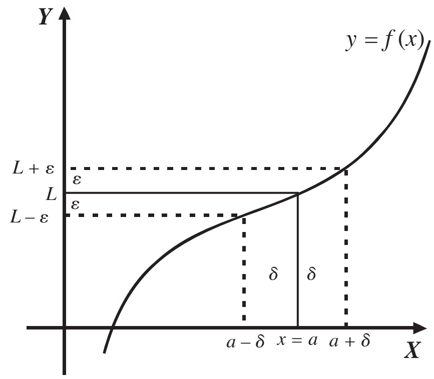
Definición formal de límite

A continuación se presenta la definición formal de límite, la cual también es conocida como definición ε-δ (epsilón-delta).

El $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho de otra forma, $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para cualquier número positivo elegido ε, por pequeño que sea, existe un número positivo δ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$



La definición nos dice que para $\lim_{x \to a} f(x) = L$ existe un número $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño para un número $\varepsilon > 0$ dado, tal que todo x en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ con excepción posiblemente del mismo a, tendrá su imagen $f(x)$ en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Observa que para un $\delta_1 < \delta$ para el mismo ε, la imagen de un valor x en el intervalo $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ estará dentro del intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ lo cual sólo cambia si tomamos un valor de epsilón distinto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5$

Solución

Para un $\varepsilon > 0$, se quiere encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |x - 3| < \delta$ entonces:

$$|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

de donde

$$|(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = |2(x - 3)| = |2|\,|x - 3| = 2|x - 3| < \varepsilon$$

entonces $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$, por lo que basta escoger $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ para que $0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Comprobación

Para $0 < |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$ tenemos que

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$2|x - 3| < \varepsilon$$

$$|2(x - 3)| < \varepsilon$$

$$|2x - 6| < \varepsilon$$

$$|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

2 Demuestra que $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-5x-6}{x+1} = -7$

Solución

Si $0 < |x-(-1)| < \delta$ entonces $\left|\dfrac{x^2-5x-6}{x+1}-(-7)\right| < \varepsilon$

de donde

$$\left|\frac{x^2-5x-6}{x+1}+7\right| = \left|\frac{x^2-5x-6+7x+7}{x+1}\right| = \left|\frac{x^2+2x+1}{x+1}\right|$$

$$= \left|\frac{(x+1)^2}{x+1}\right| = |x+1| = |x-(-1)| < \varepsilon$$

por tanto se escoge $\delta = \varepsilon$

3 Si $\lim\limits_{x\to 1}(2-3x) = -1$ y $\varepsilon = 0.06$, determina el valor de δ.

Solución

Se aplica la definición y se obtiene:

Si $0 < |x-1| < \delta$, entonces $|(2-3x)-(-1)| < \varepsilon$, donde $|3-3x| < \varepsilon$

$$|3|\,|1-x| < \varepsilon$$

$$|1-x| < \frac{\varepsilon}{|3|}$$

Pero $|1-x| = |x-1|$, por tanto, $|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ y el valor de δ está determinado por:

$$\delta \le \frac{\varepsilon}{3} \le \frac{0.06}{3} \le 0.02$$

EJERCICIO 16

Demuestra los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+4) = 10$
2. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-5) = -3$
3. $\lim\limits_{x\to -3}(5-x) = 8$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{4}x+1\right) = 1$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x-1} = -3$
6. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(2x-1) = 0$
7. $\lim\limits_{x\to -2}(1-3x) = 7$
8. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{x-7} = 14$
9. $\lim\limits_{x\to -2a}(2a-3x) = 8a$
10. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2}-3x\right) = -\dfrac{11}{2}$

Obtén el valor de δ o ε en los siguientes ejercicios:

11. Si $\lim_{x\to -1}(3x-2)=-5$ y $\varepsilon = 0.03$, encuentra el valor de δ

12. Si $\lim_{x\to -\frac{2}{5}}(5x+1)=-1$ y $\varepsilon = 0.4$, determina el valor de δ

13. Si $\lim_{x\to 0}(2x+7)=7$ y $\varepsilon = 0.05$, obtén el valor de δ

14. Si $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}(3+2x)=2$ y $\varepsilon = 0.8$, ¿cuál es el valor de δ?

15. Si $\lim_{x\to 2}(3x-7)=-1$ y $\delta = 0.06$, determina el valor de ε

16. Si $\lim_{x\to 1}(2-7x)=-5$ y $\delta = 0.0014$, obtén el valor de ε

17. Si $\lim_{x\to \frac{1}{5}}(5x+2)=3$ y $\delta = 0.05$, encuentra el valor de ε

18. Si $\lim_{x\to \frac{4}{3}}(2x+1)=\frac{11}{3}$ y $\delta = 0.001$, ¿cuál es el valor de ε?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teoremas

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones, c una constante y n número real, entonces:

1. $\lim_{x\to a} c = c$

2. $\lim_{x\to a} x = a$

3. $\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$

4. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

6. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ con $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

7. $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

Límites por evaluación

El límite se obtiene al aplicar los teoremas anteriores y evaluar el valor al cual tiende la variable en la función propuesta, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

1 Utiliza los teoremas anteriores y comprueba que el $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-4)=6$

Solución

Se aplican los respectivos teoremas, se evalúa el valor de $x = 2$, y se demuestra que:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x-4) = \lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}3x-\lim_{x\to 2}4 = \left(\lim_{x\to 2}x\right)^2+3\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}4 = (2)^2+3(2)-4=6$$

2 Si $f(x) = \dfrac{3-2x}{3+2x}$, determina el valor de $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$

Solución

Se aplican los teoremas y se sustituye el valor de x para obtener el valor buscado:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{3-2x}{3+2x} = \frac{\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(3-2x)}{\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(3+2x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}3-\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}2x}{\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}3+\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}2x} = \frac{\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}3-2\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}x}{\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}3+2\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}x} = \frac{3-2\left(\frac{1}{2}\right)}{3+2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Estos teoremas nos permiten hacer una sustitución de la variable independiente por el valor al que tiende el límite.

3 Si $f(x) = \dfrac{4}{x^2-4}$, encuentra el valor de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Solución

Se sustituye el valor de la variable independiente y se obtiene el límite:

$$\lim_{x\to 2}f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{(2)^2-4} = \frac{4}{4-4} = \frac{4}{0}$$

El límite no existe, ya que la división entre cero no está definida.

4 Obtén el $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{2x+1}$

Solución

Se sustituye $x = 3$ y se realizan las operaciones:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{2x+1} = \frac{\sqrt{9-(3)^2}}{2(3)+1} = \frac{\sqrt{9-9}}{6+1} = \frac{0}{7} = 0$$

EJERCICIO 17

Determina el valor de los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to 2} (7-2x)$
2. $\lim_{x \to 3} \left(4x^2 - 2x - 6\right)$
3. $\lim_{x \to -4} (6-3x)$
4. $\lim_{t \to -2} \sqrt{8+t^3}$
5. $\lim_{z \to 2} \sqrt{7z^2 + 14z - 7}$
6. $\lim_{x \to 4} \left(x^2 - 8\right)(4x-8)$
7. $\lim_{x \to -3} (6-3x)\left(\frac{3}{5}x^{-1}\right)$
8. $\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \left(x^2 + \frac{1}{9}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$
9. $\lim_{r \to 4} \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{2}\right)\left(r^2 - \frac{4}{r}\right)$
10. $\lim_{y \to 2} \sqrt{4y^2 - 2y}$
11. $\lim_{y \to -5} (3-y)\sqrt{y^2 - 9}$
12. $\lim_{z \to -1} \frac{4z+3}{2z+1}$
13. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+4}{x+5}$
14. $\lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{3z+1}{2z-5}$
15. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{3x+1}$
16. $\lim_{y \to 1} \frac{2+\sqrt{y^2+3}}{y-1}$
17. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x + 1}{2}$
18. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{2}}$
19. $\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^2 - x^2}{x+1}$
20. $\lim_{x \to h} \frac{x^2+h^2}{x+h}$
21. $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites indeterminados

Son aquellos cuyo resultado es de la forma $\frac{0}{0}$.

Ejemplos

Se sustituye el valor de la variable independiente en cada caso y se realizan las respectivas operaciones, para obtener:

1. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{2x-6} = \frac{(3)^2-9}{2(3)-6} = \frac{9-9}{6-6} = \frac{0}{0}$
2. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x+1} = \frac{\sqrt{1-1}}{(1)^2-2(1)+1} = \frac{\sqrt{0}}{1-2+1} = \frac{0}{0}$
3. $\lim_{y \to 0} \frac{3y^2+5y^4}{2y^2-3y^4} = \frac{3(0)^2+5(0)^4}{2(0)^2-3(0)^4} = \frac{0}{0}$
4. $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \frac{\sqrt{(2)^2+5}-3}{2-2} = \frac{\sqrt{9}-3}{0} = \frac{0}{0}$

Se observa que los resultados son de la forma $\frac{0}{0}$, por consiguiente es necesario eliminar la indeterminación.

Una indeterminación se elimina al factorizar o racionalizar (de ser posible) la función, para después simplificarla y obtener el límite.

Casos de factorización:

a) Factor común $\quad ax^n + bx^{n-1} = x^{n-1}(ax+b)$

b) Diferencia de cuadrados $\quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

c) Trinomio cuadrado perfecto $\quad a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

d) Trinomio de la forma $\quad x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

e) Suma o diferencia de cubos $\quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

f) Factorización de $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ $\quad \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \dfrac{a-b}{a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}$

g) Factorización de $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ $\quad \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \dfrac{a+b}{a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}$

h) Factorización de $\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}$ $\quad \sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b} = \dfrac{a-b}{a^{4/5} + a^{3/5}b^{1/5} + a^{2/5}b^{2/5} + a^{1/5}b^{3/5} + b^{4/5}}$

i) Factorización de $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ $\quad \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \dfrac{a-b}{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}}b^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{n-3}{n}}b^{\frac{2}{n}} + \ldots + a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-2}{n}} + b^{\frac{n-1}{n}}}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8}$

Solución

Al sustituir x con 0 en la función, el límite se indetermina:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8} = \frac{3(0)^2+5(0)^4}{2(0)^2+6(0)^4-7(0)^8} = \frac{0}{0}$$

Para eliminar la indeterminación se factorizan el numerador y el denominador con la aplicación del factor común:

$$\frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8} = \frac{x^2(3+5x^2)}{x^2(2+6x^2-7x^6)}$$

Al simplificar la expresión se obtiene:

$$\frac{3+5x^2}{2+6x^2-7x^6}$$

Luego el límite es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{3+5x^2}{2+6x^2-7x^6} = \frac{3+5(0)^2}{2+6(0)^2-7(0)^6} = \frac{3}{2}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8} = \frac{3}{2}$$

2 Determina el $\lim_{x\to -2} \frac{4-x^2}{x+2}$

Solución

Se sustituye el valor de $x = -2$ en la expresión:

$$\lim_{x\to -2} \frac{4-x^2}{x+2} = \frac{4-(-2)^2}{-2+2} = \frac{4-4}{-2+2} = \frac{0}{0}$$

Se factoriza el numerador con la aplicación de la diferencia de cuadrados:

$$4-x^2 = (2+x)(2-x)$$

Se simplifica y sustituye para obtener,

$$\lim_{x\to -2} \frac{4-x^2}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(2+x)(2-x)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(2-x) = 2-(-2) = 4$$

Por consiguiente:

$$\lim_{x\to -2} \frac{4-x^2}{x+2} = 4$$

3 Calcula el valor del $\lim_{y\to 1} \frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3}$

Solución

Al sustituir $y = 1$ se verifica que existe la indeterminación:

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3} = \frac{(1)^2-2(1)+1}{(1)^2-4(1)+3} = \frac{1-2+1}{1-4+3} = \frac{0}{0}$$

Al factorizar el numerador (trinomio cuadrado perfecto) y el denominador (trinomio de la forma $x^2 + (a+b)x + ab$), se obtiene:

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)^2}{(y-3)(y-1)} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y-3} = \frac{1-1}{1-3} = \frac{0}{-2} = 0$$

Finalmente, el resultado es:

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3} = 0$$

4 Determina el $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}$

Solución

Al sustituir $x = 2$ se observa que existe la indeterminación:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{2x^2-3x-2} = \frac{(2)^3-8}{2(2)^2-3(2)-2} = \frac{8-8}{8-6-2} = \frac{0}{0}$$

Se factoriza la diferencia de cubos y el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

$$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4), \qquad 2x^2-3x-2 = (x-2)(2x+1)$$

Se simplifica, se sustituye y se obtiene el valor del límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(2x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{2x+1}=\frac{(2)^2+2(2)+4}{2(2)+1}=\frac{12}{5}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}=\frac{12}{5}$$

5 Calcula el valor del $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}$

Solución

Se sustituye $x = 2$ en la función:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\frac{(2)^2-4}{3-\sqrt{2+7}}=\frac{4-4}{3-3}=\frac{0}{0}$$

Se racionaliza el denominador de la función, multiplicando por $3+\sqrt{x+7}$, que es el conjugado de la expresión $3-\sqrt{x+7}$:

$$\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}\cdot\frac{3+\sqrt{x+7}}{3+\sqrt{x+7}}=\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{(3)^2-\left(\sqrt{x+7}\right)^2}=\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{9-(x+7)}=\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}$$

Se factoriza x^2-4:

$$\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=\frac{(x-2)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=\frac{-(2-x)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}$$

Se simplifica la expresión,

$$\frac{-(2-x)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=-(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)$$

Se calcula el valor del límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\lim_{x\to 2}\left[-(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)\right]=-(2+2)\left(3+\sqrt{2+7}\right)=-(4)(3+3)=-24$$

Por consiguiente, el resultado es:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=-24$$

6 Determina $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$

Solución

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 2}\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 2} \cdot \frac{x - 2}{x^{2/3} + x^{1/3}2^{1/3} + 2^{2/3}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x^{2/3} + x^{1/3}2^{1/3} + 2^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{2^{2/3} + 2^{1/3} \cdot 2^{1/3} + 2^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{2^{2/3} + 2^{2/3} + 2^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 2^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{2^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

Por tanto $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

EJERCICIO 18

Determina el valor de los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{3x + 2x^2}{5x + 6x^3}$
2. $\lim_{h \to 0} \frac{2h^3 - 5h^2 + h}{h^4 - h^2}$
3. $\lim_{y \to 0} \frac{4y^5 + 5y^3}{y^4 - y^2}$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx^3}{cx^2 + dx^3}$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{5x^n - 3x^{n-1} + 4x^{n-2}}{2x^n - 6x^{n-2}}$
6. $\lim_{z \to 1} \frac{z - 1}{z^2 - 1}$
7. $\lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{9x^2 - 4}{3x - 2}$
8. $\lim_{y \to -h} \frac{y + h}{h^2 - y^2}$
9. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{4 - x^2}$
10. $\lim_{w \to a} \frac{a^2 - w^2}{a - w}$
11. $\lim_{z \to 7} \frac{z^2 - 5z - 14}{z - 7}$
12. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 7x + 12}$
13. $\lim_{h \to 1} \frac{h - 1}{h^2 - 4h + 3}$
14. $\lim_{x \to -5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 2x - 15}$

15. $\lim\limits_{v\to4}\frac{v^2-6v+8}{2v^2-8v}$

16. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$

17. $\lim\limits_{h\to\frac{1}{2}}\frac{4h^2+4h-3}{2h-1}$

18. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\frac{3x-2}{3x^2-11x+6}$

19. $\lim\limits_{w\to-\frac{4}{3}}\frac{9w^2+9w-4}{3w^2+7w+4}$

20. $\lim\limits_{y\to6}\frac{2y^2-15y+18}{3y^2-17y-6}$

21. $\lim\limits_{x\to5}\frac{2x^2-13x+15}{x^2-x-20}$

22. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{9x^2-1}{6x^2+5x+1}$

23. $\lim\limits_{y\to-1}\frac{y+1}{y^3+1}$

24. $\lim\limits_{h\to\frac{1}{2}}\frac{8h^3-1}{1-2h}$

25. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\frac{27x^3-8}{9x^2-4}$

26. $\lim\limits_{w\to-2}\frac{w^2+5w+6}{w^3+8}$

27. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\frac{64x^3-1}{4x^3-x^2}$

28. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

29. $\lim\limits_{y\to-2}\frac{y+2}{\sqrt{y+3}-1}$

30. $\lim\limits_{w\to0}\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+3}-\sqrt{3}}$

31. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{4x^2+3}-2}{2x-1}$

32. $\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

33. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}}$

34. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{\sqrt{x+5}-3}$

35. $\lim\limits_{w\to0}\frac{a-\sqrt{w^2+a^2}}{b-\sqrt{w^2+b^2}}$

36. $\lim\limits_{y\to p}\frac{\sqrt[n]{y}-\sqrt[n]{p}}{y-p}$

37. $\lim\limits_{v\to0}\frac{\sqrt{4-2v+v^2}-2}{v}$

38. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-7x+6}{x^3+x^2-4x-4}$

39. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+4x+3}$

40. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^4+2x^3-11x^2-12x+36}{x^3-2x^2-x+2}$

41. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^3+6x^2+5x-12}$

42. $\lim\limits_{y\to2}\frac{y^3-6y^2+12y-8}{y^4-4y^3+16y-16}$

43. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1}$

44. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x^2-a^2}$

45. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\frac{\sqrt[3]{9x^2+4}-2}{3x-2}$

46. $\lim\limits_{y\to2}\frac{\sqrt[4]{y^3+8}-\sqrt{2+y}}{y-2}$

47. $\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$

48. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt[3]{4x+19}}{x-2}$

49. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt[3]{x-1}-1}$

50. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt[5]{2x+3}-1}{x^5+1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites cuando x tiende al infinito

Sea una función f definida en el intervalo (a, ∞). Si se tiene que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

entonces significa que los valores de $f(x)$ se aproximan a L tanto como se quiera para una x lo suficientemente grande, sabemos que ∞ no es un número, sin embargo, se acostumbra decir "el límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito, es L".

Cuando en una función $x \to \infty$, se busca la base de mayor exponente y ésta divide a cada uno de los términos de la función, después, para obtener el valor del límite, se aplica el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^n} = 0 \text{ , con } c \text{ constante}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{6x^2 + 2x - 1}$

Solución

La base del término con mayor exponente es x^2, por consiguiente, todos los términos del numerador y del denominador se dividen entre esta base:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{6x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

Se simplifica y aplica el teorema para obtener el límite,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}{6 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \to \infty} 2 - \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^2}}{\lim_{x \to \infty} 6 + \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{6 + 0 - 0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Por consiguiente, $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{6x^2 + 2x - 1} = \frac{1}{3}$

2 Determina el $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5}}{2x + 3}$

Solución

La base del término con mayor exponente es x, por tanto, se dividen los términos entre esta base y se simplifica la expresión para obtener el valor del límite.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5}}{2x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2 - 5}}{x}}{\frac{2x + 3}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^2 - 5}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{5}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{\lim_{x \to \infty} 9 - \lim_{x \to \infty} \frac{5}{x^2}}}{\lim_{x \to \infty} 2 + \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{9 - 0}}{2 + 0} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$$

3 Determina el resultado de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+2}{x^3+2}$

Solución

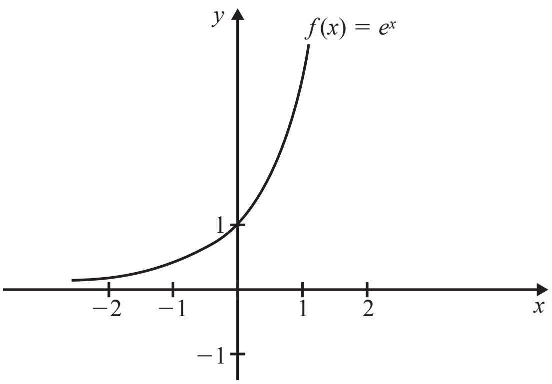
Se dividen todos los términos entre x^3, se simplifica y se obtiene el valor del límite.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^3+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{2}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}} = \frac{0+0}{1+0}=\frac{0}{1}=0$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^3+2}=0$$

Si observamos la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$, tenemos que cuando $x \to -\infty$, $f(x)$ tiende a cero.

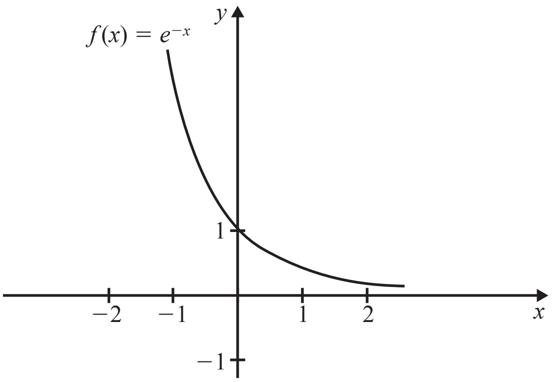


entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

esto cumple también cuando tenemos la función $g(x) = a^x$ para $a > 0$, es decir

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \text{ para } a > 0$$

Por otro lado, si tenemos $f(x) = e^{-x}$, tenemos que cuando $x \to \infty$, $f(x)$ se aproxima a cero.



entonces $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

También se cumple $\lim\limits_{x\to\infty} a^{-x} = 0$ para $a > 0$

EJERCICIO 19

Obtén los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+8}{4x+3}$

2. $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{2y^2-3y+5}{y^2-5y+2}$

3. $\lim\limits_{w\to\infty}\dfrac{3w^2+5w-2}{5w^3+4w^2+1}$

4. $\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{5h^4-2h^2+3}{3h^3+2h^2+h}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{18x^2-3x+2}{2x^2+5}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-2x^2+3}}{2x+1}$

7. $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{y^3}-3y^4}{9y^4-\dfrac{5}{y^2}-3}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{-1}+3x^{-2}}{x^{-2}+4}$

9. $\lim\limits_{v\to\infty}\dfrac{\sqrt{v^2+1}}{\sqrt[3]{v^3-3}}$

10. $\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{\sqrt{h^2+4}-\sqrt{h^2-4}}{h}$

11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{11x+6}{4-6x}$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3x-2)(3x+1)}{(2x+7)(x-2)}$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+3}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_mx^m+\ldots+a_1x+a_0}{b_nx^n+\ldots+a_1x+b_0}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^n+bx^m}{cx^n-dx^m}$ con $n>m$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{ax^n+1}}{x}$

➡ **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Asíntotas horizontales

Sea la función $y=f(x)$, si la curva tiene una asíntota horizontal en $y=c$, entonces la ecuación de la asíntota es:

$$y=\lim_{x\to\infty}f(x)\quad \text{o}\quad y=\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la ecuación de la asíntota horizontal de $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x+3}$

Solución

Al aplicar $y=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, se obtiene:

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x+1}{x}}{\dfrac{2x+3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{3}{x}}=\frac{3}{2}$$

Por tanto, la curva tiene una asíntota horizontal en $y=\dfrac{3}{2}$ o $2y-3=0$

2 Determina la ecuación de la asíntota horizontal de $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

Solución

Se aplica $y = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, entonces la asíntota horizontal tiene por ecuación:

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

El resultado $y = 0$ indica que la asíntota horizontal es el eje X.

3 Obtén la ecuación de la asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$

Solución

Se aplica la definición $y = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y se obtiene:

$$y = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x-3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{0}$$

El límite no existe ya que la división entre cero no está definida.

El resultado indica que la curva no tiene asíntotas horizontales.

EJERCICIO 20

Encuentra las ecuaciones de las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

1. $y = \dfrac{2x+3}{4x-5}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{5}$
4. $y = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}$
5. $f(x) = \dfrac{2x^3+3x^2+3x+1}{x^3-1}$
6. $y = \dfrac{ax+b}{cx-d}$
7. $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$
8. $xy + 2x - 1 = 0$
9. $f(x) = 2x + 5$
10. $f(x) = \dfrac{ax^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{bx^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Asíntotas oblicuas

Se le denomina asíntota oblicua a aquella recta cuyo ángulo de inclinación θ es diferente de 0° y 90°.

Caso I

Sea una función racional de la forma $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es un grado mayor que el grado de $P(x)$ y $P(x)$ no es factor de $Q(x)$, entonces $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en la recta $y = ax + b$ siendo $f(x) = ax + b + \dfrac{R(x)}{P(x)}$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x + 1}$

Solución

La función no tiene asíntotas horizontales, pero sí posee una asíntota vertical en $x = -1$

El grado del numerador es un grado mayor que el grado del denominador y éste no es factor del numerador, entonces:

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{x+1}$$

Para obtener la asíntota oblicua se aplica cualquiera de las dos condiciones:

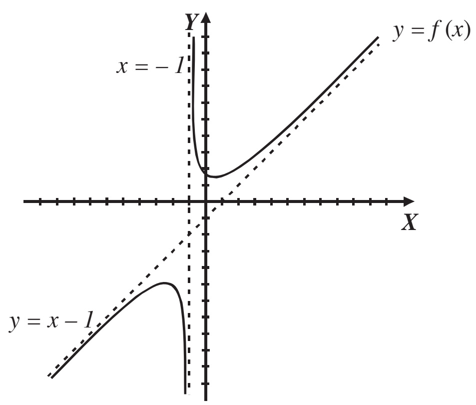
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (ax + b)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (x - 1)\right]$$

Pero $f(x) - (x - 1) = \dfrac{3}{x+1}$, por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{0}{1+0} = 0$$

La función tiene una asíntota oblicua en la recta $y = x - 1$



2 Obtén las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

Solución

La función carece de asíntotas verticales y horizontales, para obtener las asíntotas oblicuas la función se representa de la siguiente forma:

$$f(x) = x + \frac{1 - x}{x^2 + 1}$$

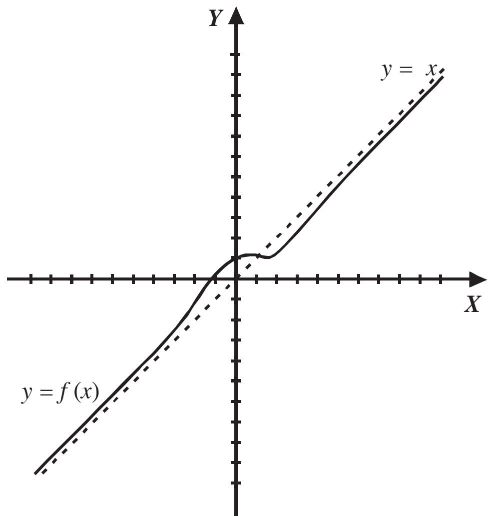
Para comprobar que $y = x$ es la ecuación de la asíntota oblicua, se aplica la definición:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (ax + b)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1 - x}{x^2 + 1}\right)$$

Se obtiene el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1 - x}{x^2 + 1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = \frac{0 - 0}{1 + 0} = 0$$

Por tanto, la función tiene una asíntota oblicua en $y = x$



Analicemos otro método; sea una función racional de la forma $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es un grado mayor que el de $P(x)$ y $P(x)$ no es factor de $Q(x)$, entonces $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en la recta $y = ax + b$, cuyos valores de a y b están dados por:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - ax\right]$$

Ejemplo

Obtén las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 3}{x}$

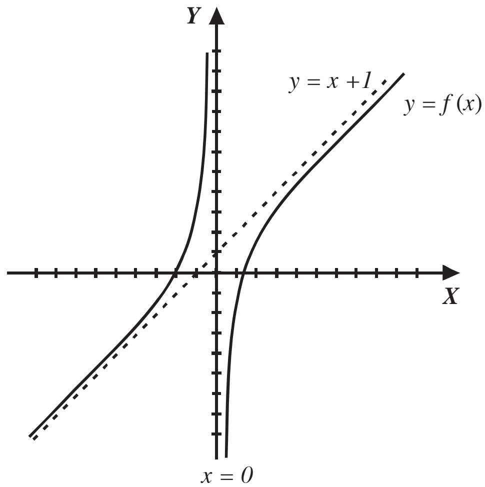
Solución

La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y no tiene asíntota horizontal, para obtener la ecuación de la asíntota oblicua se aplican los límites anteriores:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\dfrac{x^2 + x - 3}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + x - 3}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 + x - 3}{x} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 + x - 3 - x^2}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{3}{x}\right) = 1$$

Se sustituyen a y b en la ecuación $y = ax + b$, por tanto, la asíntota es: $y = x + 1$
Gráfica



Caso II

Sea una función $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es mayor que uno y mayor al grado de $P(x)$, la función tiene una asíntota oblicua no lineal.

Ejemplo

Determina las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

Solución

Esta función tiene una asíntota vertical en $x = 0$

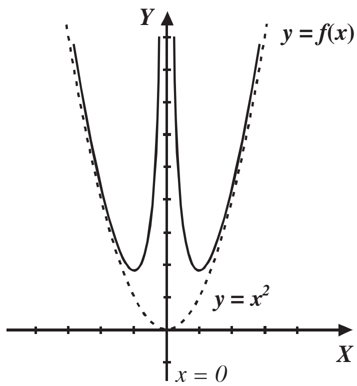
Se realiza el cociente y el resultado es:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Por consiguiente, la función tiene una asíntota cuya ecuación es $y = x^2$



EJERCICIO 21

De las siguientes funciones determina las ecuaciones de las asíntotas y traza sus gráficas:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 2}$
2. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x - 3}$
3. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x + 5}{2x - 1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x + 2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 + 1}$
6. $f(x) = \dfrac{x^5}{x^4 - 1}$
7. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 3x^2)^{-\frac{1}{3}}}$
9. $f(x) = \dfrac{x^5 + 1}{x^2 - 1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites laterales

Límite por la derecha

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo abierto (x_o, b), el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_o por la derecha es L y se representa:

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = L$$

Lo anterior denota que $f(x)$ se aproxima a L cuando x tiende a aproximarse con valores mayores que x_o

Límite por la izquierda

Sea una función definida en el intervalo abierto (a, x_o), el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_o, por la izquierda es L y se representa:

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = L$$

Lo anterior denota que $f(x)$ se aproxima a L cuando x tiende a aproximarse con valores menores que x_o

Teorema

El límite cuando $x \to x_o$ de una función $f(x)$, existe y es igual a L, si y solo si los límites laterales son iguales a L, es decir

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = L$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el $\lim_{x\to 2} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x<2 \\ 5-x^2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

Solución

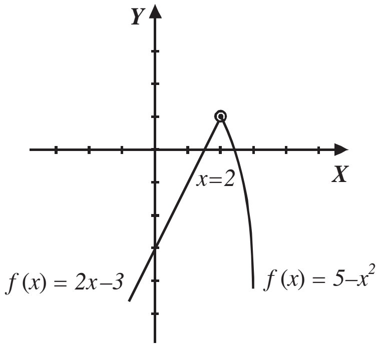
Se calculan los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x-3) = 2(2)-3 = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (5-x^2) = 5-(2)^2 = 5-4 = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$$

Por consiguiente el $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$



2 Calcula el $\lim_{x\to 0} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{si } x\geq 0 \\ 2x+1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

Solución

Se obtienen los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(0)^2} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x+1) = 2(0)+1 = 1$$

Dado que, $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, entonces el $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

La existencia de un límite lateral no implica la existencia del otro (ejemplo anterior). Cuando $f(x)$ está definida de un solo lado, entonces el $\lim_{x\to x_o} f(x)$ es igual al límite lateral de dicho lado.

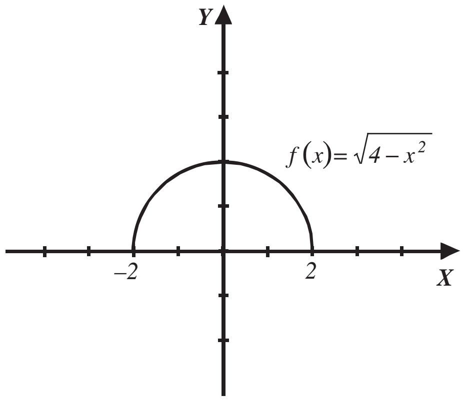
3 ¿Cuál es el $\lim_{x\to 2} f(x)$ si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$?

Solución

Esta función está definida en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$, por tanto, los valores de x tienden únicamente a 2 por la izquierda, entonces el valor del límite es:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2)^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0$$



EJERCICIO 22

Para las siguientes funciones, determina el valor de los límites indicados:

1. Si $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ 2x+5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ $\quad$ *a)* $\lim_{x\to 3^+} f(x)$, *b)* $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, *c)* $\lim_{x\to 3} f(x)$

2. Si $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -2 \\ x^2-5 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ -6 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ $\quad$ *a)* $\lim_{x\to -2^+} g(x)$, *b)* $\lim_{x\to -2^-} g(x)$, *c)* $\lim_{x\to -2} g(x)$, *d)* $\lim_{x\to 1^+} g(x)$, *e)* $\lim_{x\to 1^-} g(x)$, *f)* $\lim_{x\to 1} g(x)$

3. Si $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}-1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \dfrac{x^2-11}{3} & \text{si } 3 < x \end{cases}$ $\quad$ *a)* $\lim_{x\to 1^+} h(x)$, *b)* $\lim_{x\to 1^-} h(x)$, *c)* $\lim_{x\to 1} h(x)$, *d)* $\lim_{x\to 3^+} h(x)$, *e)* $\lim_{x\to 3^-} h(x)$, *f)* $\lim_{x\to 3} h(x)$

4. Si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$ $\quad$ *a)* $\lim_{x\to -1^+} f(x)$, *b)* $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, *c)* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, *d)* $\lim_{x\to 2} f(x)$, *e)* $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

5. Si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \leq 2 \\ 2x & \text{si } 2 < x < 4 \\ \sqrt{x+5} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ $\quad$ *a)* $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, *b)* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, *c)* $\lim_{x\to 2} f(x)$, *d)* $\lim_{x\to 4^-} f(x)$, *e)* $\lim_{x\to 4^+} f(x)$, *f)* $\lim_{x\to 4} f(x)$

6. Si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x-10}{x+2} & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{3-2x}{x^2-5} & \text{si } x > -2 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x \to -2} f(x)$

7. Si $h(\theta) = \begin{cases} \operatorname{sen}\theta & \text{si } \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos 2\theta & \text{si } \theta \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} h(\theta)$

8. Si $g(x) = \begin{cases} 3e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 3+7\log(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} g(x)$

9. Si $w(x) = \begin{cases} \sqrt{4-3\operatorname{sen}x} & \text{si } x < \pi \\ \dfrac{3\cos x+5}{1-\log\left(\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)} & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x \to \pi} w(x)$

10. Si $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}x + \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites de funciones trigonométricas

A continuación se muestra la tabla de valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables, así como los ángulos de 0, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$ y 2π

Ángulos en radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe	0	No existe	0
Cotangente	No existe	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	No existe	0	No existe
Secante	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	No existe	-1	No existe	1
Cosecante	No existe	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	No existe	-1	No existe

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor del $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x$

Solución

Se sustituye el valor de $x = \dfrac{\pi}{4}$ en la función:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

Por consiguiente, el valor del límite es 1.

2 ¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1+x}$?

Solución

Al sustituir $x = 0$, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1+x} = \frac{\operatorname{sen}\ 2(0) - 3\cos 2(0)}{1+0} = \frac{\operatorname{sen} 0 - 3\cos 0}{1} = \frac{0-3(1)}{1} = -3$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1+x} = -3$

3 Obtén $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan\frac{x}{2} - \cos 2x}{\operatorname{sen} x + 1}$

Solución

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan\frac{x}{2} - \cos 2x}{\operatorname{sen} x + 1} = \frac{\tan\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \cos\pi}{1+1} = \frac{1-(-1)}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Por consiguiente, el valor del límite es 1.

EJERCICIO **23**

Calcula los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos 3x}{x+3}\right)$
2. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{6}} (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$
3. $\lim\limits_{\alpha\to\pi}\left(2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha\right)$
4. $\lim\limits_{w\to 0} \dfrac{\tan^2 w - 1}{\tan^2 w + 1}$
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{4\cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}}$
7. $\lim\limits_{h\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan h}{\operatorname{sen}^2 h - 1}$
8. $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$
9. $\lim\limits_{w\to\pi} \dfrac{\sec^2 w}{1 - \operatorname{sen}^2 w}$
10. $\lim\limits_{\beta\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{sen}\beta - \cos\beta}{\tan\beta - \sqrt{3}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites trigonométricos indeterminados

Para evitar la indeterminación en un límite de funciones trigonométricas, se transforma la función utilizando identidades trigonométricas, en ocasiones con esto es suficiente, también se puede simplificar hasta obtener una expresión de la siguiente forma:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \frac{1-\cos x}{x} \quad \text{o} \quad \frac{\cos x - 1}{x}$$

y utilizar los siguientes teoremas:

$$\lim_{v\to 0}\frac{\operatorname{sen} v}{v} = 1; \qquad \lim_{v\to 0}\frac{1-\cos v}{v} = \lim_{v\to 0}\frac{\cos v - 1}{v} = 0$$

A continuación se da una lista de las identidades que se pueden utilizar.

Identidades trigonométricas fundamentales	Funciones del ángulo doble
$\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$	$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$
$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$
$\operatorname{sen}\alpha\csc\alpha = 1 \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha} \\ \csc\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \end{cases}$	$\cos 2\alpha = 2\operatorname{sen}^2\alpha - 1$
$\cos\alpha\sec\alpha = 1 \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha} \\ \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \end{cases}$	$\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$
	$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
	Funciones de suma o diferencia de ángulos
$\tan\alpha\cot\alpha = 1 \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} \\ \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} \end{cases}$	$\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$
	$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
	Transformaciones de sumas o restas de funciones trigonométricas a producto
$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \begin{cases} \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \end{cases}$	$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$

Solución

Se sustituye $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, resultando:

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \frac{1 - \tan\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0}$$

Para eliminar la indeterminación, se aplican las identidades trigonométricas con el fin de obtener una expresión equivalente que no se indetermine:

$$\frac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \frac{\frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{-\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)} = -\frac{1}{\cos\theta}$$

Se calcula el valor del límite:

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{-1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Por consiguiente, $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = -\sqrt{2}$

2 Calcula el $\lim\limits_{w \to 0} \dfrac{\cos w - \cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w}$

Solución

Al evaluar el límite:

$$\lim_{w \to 0} \frac{\cos w - \cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w} = \frac{\cos 0 - \cos 2(0)}{\operatorname{sen}^2(0)} = \frac{1-1}{(0)^2} = \frac{0}{0}$$

Se indetermina la función, por consiguiente, se transforma mediante identidades trigonométricas, como se ilustra:

$$\lim_{w \to 0} \frac{\cos w - \cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w} = \lim_{w \to 0} \frac{\cos w - (\cos^2 w - \operatorname{sen}^2 w)}{\operatorname{sen}^2 w} = \lim_{w \to 0} \frac{\cos w - \cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w}$$

$$= \lim_{w \to 0} \left[\frac{\cos w\,(1 - \cos w) + \operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w}\right] = \lim_{w \to 0} \left[\frac{\cos w\,(1 - \cos w)}{\operatorname{sen}^2 w} + \frac{\operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w}\right] \lim_{w \to 0} \left[\frac{\cos w\,(1 - \cos w)}{1 - \cos^2 w} + 1\right]$$

$$= \lim_{w \to 0} \left[\frac{\cos w\,(1 - \cos w)}{(1 + \cos w)(1 - \cos w)} + 1\right] = \lim_{w \to 0} \left[\frac{\cos w}{1 + \cos w} + 1\right]$$

Se aplica el límite:

$$= \lim_{w \to 0} \left[\frac{\cos w}{1 + \cos w} + 1\right] = \frac{\cos 0}{1 + \cos 0} + 1 = \frac{1}{1+1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Finalmente, el valor del límite es $\dfrac{3}{2}$

3 Obtén el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\text{ sen }3x}{x}$

Solución

Para que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\text{ sen }3x}{x}$ adopte la forma $\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{\text{sen }v}{v}$, se multiplica por 3 tanto el numerador como el denominador

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }3x}{x}\cdot\frac{3}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{6\text{ sen }3x}{3x}=6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }3x}{3x}=6(1)=6$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\text{ sen }3x}{x}=6$

4 ¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos ay-\cos by}{y^2}$?

Solución

Se sustituye $y=0$ en la función:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\frac{\cos a(0)-\cos b(0)}{(0)^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Se transforma la diferencia de cosenos en producto,

$$\cos ay-\cos by=-2\text{ sen}\left(\frac{ay+by}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{ay-by}{2}\right)=-2\text{ sen}\frac{(a+b)y}{2}\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}$$

Entonces:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-2\text{ sen}\dfrac{(a+b)y}{2}\text{sen}\dfrac{(a-b)y}{2}}{y^2}$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\left[\frac{\text{sen}\dfrac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\text{sen}\dfrac{(a-b)y}{2}}{y}\right]$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\dfrac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\dfrac{(a-b)y}{2}}{y}$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\dfrac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\dfrac{(a+b)}{2}}{\dfrac{(a+b)}{2}}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\dfrac{(a-b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\dfrac{(a-b)}{2}}{\dfrac{(a-b)}{2}}$$

$$=\frac{-2(a+b)}{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\dfrac{(a+b)y}{2}}{\dfrac{(a+b)y}{2}}\cdot\frac{(a-b)}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\dfrac{(a-b)y}{2}}{\dfrac{(a-b)y}{2}}$$

$$=\frac{-2(a+b)}{2}(1)\cdot\frac{(a-b)}{2}(1)$$

$$=\frac{-2(a^2-b^2)}{4}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

Por tanto, $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\dfrac{b^2-a^2}{2}$

5 Determina el valor de $\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}$

Solución

Se evalúa la función para $x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1+(0-1)\cos(0)}{4(0)}=\frac{1+(-1)(1)}{4(0)}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Se transforma la expresión de la siguiente forma

$$\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1+x\cos x-\cos x}{4x}=\frac{1-\cos x+x\cos x}{4x}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\frac{x\cos x}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\cos x\right]$$

entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\cos x\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}+\lim_{x\to 0}\cos x\right]\\ &= \frac{1}{4}[0+1]\\ &= \frac{1}{4}(1)\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1}{4}$$

EJERCICIO 24

Determina el valor de los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{w\to 0}\dfrac{w^2}{\cos w - 1}$

2. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\text{sen } 3\theta}{\tan 4\theta}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{\text{sen}^2 x}$

4. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{2\text{ sen }\alpha - \tan 2\alpha}{\alpha}$

5. $\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{1-\sec v}{v^2 \sec v}$

6. $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\text{sen}^2\,\theta}{\tan^3\theta}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{(\cos x - 1)^2}}{\tan x}$

8. $\lim\limits_{w\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2w}{\cos w - \text{sen } w}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sqrt{1-\text{sen } x}-\sqrt{1+\text{sen } x}}$

10. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\tan(3+\alpha)-\tan(3-\alpha)}{\text{sen}(3-\alpha)-\text{sen}(3+\alpha)}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(a^2-b^2)}{\cos ax - \cos bx}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\text{sen } x)^m}{(\text{sen } 2x)^m}$

13. $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\tan\theta$

14. $\lim\limits_{w\to 0}\left(\dfrac{1}{\tan w}-\dfrac{1}{\text{sen } w}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2\tan x - \text{sen } 2x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{3x^3\csc^2 x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}^2\,3x}{x^2}$

18. $\lim\limits_{w\to 0}\dfrac{\sec 2w - 1}{w\sec 2w}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx - \cos nx}{2x^2}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x - \cos^2 2x}{x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 3

Continuidad

Reseña HISTÓRICA

En el siglo XIX la matemática se apoyaba en la geometría y el álgebra para buscar sustento a sus afirmaciones.

En el cálculo infinitesimal se siguieron las líneas que le eran posibles con el sustento conceptual, como la existencia de funciones continuas.

Es cuando Weierstrass publica en 1872, gracias a su discípulo Paul Du Bois Reymond, su teorema sobre la existencia de funciones continuas que en algunos puntos no tenían derivada; las consecuencias de este teorema fueron de gran interés, en su época se decía que una función era continua si su gráfica se podía trazar sin despegar el lápiz del papel, aún en nuestra época esto da una idea informal de la continuidad de una función.

Pero el resultado de Weierstrass mostró que se podía hablar de la continuidad en un lenguaje totalmente analítico, sin necesidad de recurrir a imágenes geométricas. Este lenguaje proporcionó la advertencia sobre lo peligroso que resultaba confiar demasiado en las conclusiones extraídas de un dibujo.

Karl Weierstrass
(1815-1897)

Continuidad puntual

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x_o \in R$ si cumple con las siguientes condiciones:

1. $f(x_o)$ está definida.
2. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ existe.
3. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica si $f(x) = x^2 - 1$ es continua en $x_o = 2$

Solución

Se deben verificar las tres condiciones:

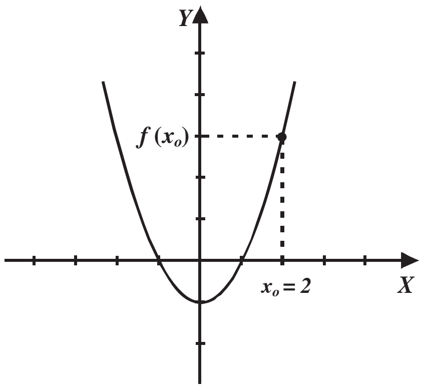
1. $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$, por tanto $f(x)$ está definida para $x_o = 2$
2. Se calcula el valor de cada límite lateral:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = (2)^2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = (2)^2 - 1 = 3$$

Entonces, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ sí existe y $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

3. Como $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ y $f(2) = 3$, entonces $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, por consiguiente, $f(x)$ es continua en $x_o = 2$



2 Determina si la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es continua en $x_o = 1$

Solución

Se verifican las condiciones:

1. $f(1) = -(1)$

   $f(1) = -1$, la función está definida en $x_o = 1$

2. Se determinan los límites laterales:

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 3) = 2(1) - 3 = -1$

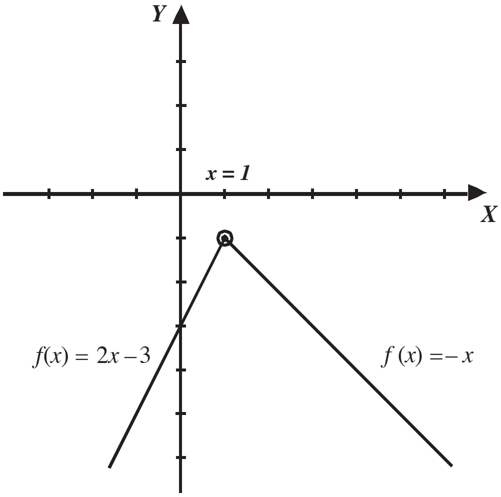
   $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x) = -(1) = -1$

   Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$

3. Probar que el $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

   $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = -1$

   Finalmente, es continua en $x_o = 1$



3 Determina si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 3 & \text{si } 3 < x \end{cases}$ es continua en $x = 1$ y $x = 3$

Solución

Se verifican las condiciones para los puntos $x = 1$ y $x = 3$:

1. $f(1) = (1)^2 = 1$, la función está definida en $x_o = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 3) = 2(1) - 3 = -1$;

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1$

   Debido a que el $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe.

   Por tanto, $f(x)$ no es continua en $x_o = 1$

   Se verifica la continuidad en $x_o = 3$

1. $f(3) = 2(3) - 3 = 3$, la función está definida en $x_o = 3$

2. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 3 = 3$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 2(3) - 3 = 3$

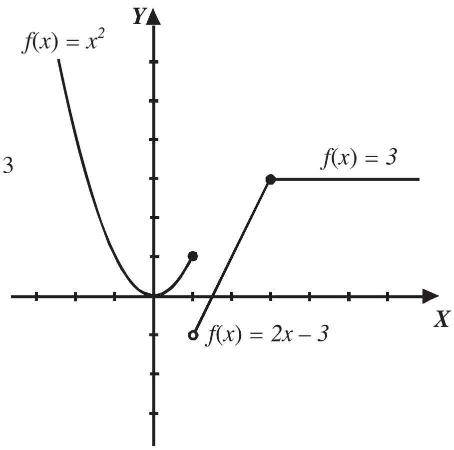
   Se concluye que,

   $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

   Entonces, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$

3. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$ y $f(x) = 3$ entonces, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

   Por consiguiente, $f(x)$ es continua en $x_o = 3$



4 Es continua $g(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si} \quad x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si} \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ en $x_o = \frac{\pi}{2}$

Solución

Si se verifican los pasos se obtiene:

1. $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ no está definida, por tanto, la función no es continua en $x_o = \frac{\pi}{2}$

Discontinuidad evitable o removible

Sea $f(x)$ una función racional no continua en $x = x_0$, si mediante una simplificación algebraica, $f(x)$ se vuelve continua en $x = x_o$, entonces recibe el nombre de discontinuidad evitable o removible.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica si es continua la función $f(x) = \dfrac{6x^2 - 7x + 2}{2x - 1}$ en $x = \dfrac{1}{2}$

Solución

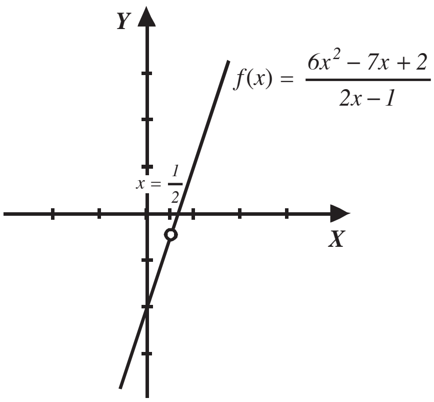
1. Se evalúa la función en $x = \dfrac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 2}{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{6\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{7}{2} + 2}{1 - 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{7}{2} + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

La función se indetermina o no está definida para el valor de $x = \dfrac{1}{2}$, lo cual implica que es discontinua en este punto; sin embargo, se elimina la indeterminación mediante una simplificación algebraica.

$$f(x) = \frac{6x^2 - 7x + 2}{2x - 1} = \frac{(3x - 2)(2x - 1)}{2x - 1} = 3x - 2;\ \text{si } x \neq \frac{1}{2}$$

Esta simplificación indica que la gráfica es una línea recta con discontinuidad evitable o removible en $x = \dfrac{1}{2}$



2 Determina si la función $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$ es continua en $x = 3$ y traza su gráfica.

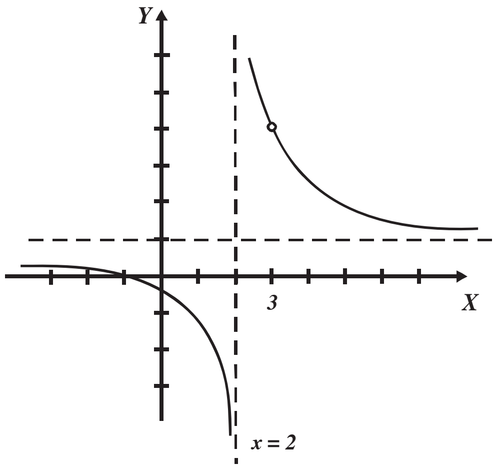
1. Se evalúa la función en $x = 3$,

$$f(3) = \frac{(3)^2-2(3)-3}{(3)^2-5(3)+6} = \frac{9-6-3}{9-15+6} = \frac{0}{0}$$

La función no está definida en $x = 3$, sin embargo, mediante una simplificación se puede eliminar la discontinuidad,

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}\ , \text{ si } x \neq 3$$

La gráfica de esta función es una hipérbola con discontinuidad evitable o removible en $x = 3$



3 Determina el valor de k para que la función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-k, & x<1 \\ 2kx-3, & x\geq 1 \end{cases}$$

Solución

Se obtienen los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3x-k) = 3(1) - k = 3 - k$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2kx-3) = 2\text{k}(1) - 3 = 2k - 3$$

Para que el límite exista:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

entonces:

$$3 - k = 2k - 3$$
$$-k - 2k = -3 - 3$$
$$-3k = -6$$
$$k = \frac{-6}{-3}$$
$$k = 2$$

por tanto, para que la función sea continua $k = 2$, es decir la función se debe escribir:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x<1 \\ 4x-3, & x\geq 1 \end{cases}$$

Comprobación

Probemos que la función es continua en $x = 1$

i) $f(1) = 4(1) - 3 = 4 - 3 = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (3x - 2) = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (4x - 3) = 4(1) - 3 = 4 - 3 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^{-1}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

por tanto $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

iii) $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x = 1$.

4 Determina los valores de a y b para que la función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} ax-3 & x\leq -2 \\ x^2-1 & -2<x<3 \\ bx+1 & x\geq 3 \end{cases}$$

Solución

Se obtienen los límites laterales en $x = -2$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (ax - 3) = a(-2) - 3 = -2a - 3$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Para que el límite exista se debe cumplir:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

Entonces:

$$-2a - 3 = 3$$
$$-2a = 3 + 3$$
$$-2a = 6$$
$$a = \frac{6}{-2}$$
$$a = -3$$

Por tanto $a = -3$
Se obtienen los límites laterales en $x = 3$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (bx + 1) = b(3) + 1 = 3b + 1$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 - 1) = (3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

entonces

$$\begin{aligned} 3b + 1 &= 8 \\ 3b &= 8 - 1 \\ 3b &= 7 \\ b &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto $b = \dfrac{7}{3}$

EJERCICIO 25

Verifica si las funciones propuestas son continuas en los puntos indicados:

1. $f(x) = 2x^2 - x$, en $x = 0$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, en $x = 2$
3. $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3}$, en $x = -\dfrac{3}{2}$
4. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x+1}}$, en $x = 3$
5. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, en $x = 2$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, en $x = 2\pi$
7. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, en $x = 2$
8. $g(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, en $x = 1$
9. $h(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, en $x = 0$
10. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 3x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, en $x = -2$ y $x = 2$
11. $q(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x < 1 \\ -3x + 5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \sqrt{2x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, en $x = 1$ y $x = 2$
12. $h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{si } x \leq \pi \\ \cos x & \text{si } \pi < x \leq \dfrac{3}{2}\pi \\ \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{si } x > \dfrac{3}{2}\pi \end{cases}$, en $x = \pi$ y $x = \dfrac{3}{2}\pi$

13. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 2 & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ \log(x+7)^7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, en $x = -3$ y $x = 3$

14. $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$, en $x = 3$

15. $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$, en $x = 1$

16. $g(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$, en $x = -2$

17. $f(x) = \dfrac{x - 8}{x^2 + x - 72}$, en $x = 8$

18. $w(x) = \dfrac{6x^2 - x - 1}{4x^2 - 4x + 1}$, en $x = \dfrac{1}{2}$

Determina el valor de *k* para que las siguientes funciones sean continuas:

19. $f(x) = \begin{cases} 2x + k & \text{si } x < 2 \\ 3kx - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} k^2 - x & \text{si } x \leq 0 \\ 2k + 3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

21. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x + k} & \text{si } x < 3 \\ kx - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Obtén el valor de las constantes para que las siguientes funciones sean continuas:

22. $f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{si } x \leq -4 \\ x^2 - 4 & \text{si } -4 < x < 1 \\ bx + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ 3xb - 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 2a - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a + bx & \text{si } 1 < x < 4 \\ ax - 2b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Continuidad de una función en un intervalo

Continuidad por la derecha

Una función $f(x)$ es continua a la derecha de x_o si y solo si para $x \in R$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f(x_o)$ existe
2. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ existe
3. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Continuidad por la izquierda

Una función $f(x)$ es continua a la izquierda de x_o si y solo si para $x \in R$:

1. $f(x_o)$ existe
2. $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x)$ existe
3. $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_o)$

Continuidad de una función en un intervalo abierto

Se dice que $f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a, b) si y solo si es continua en todos los puntos del intervalo.

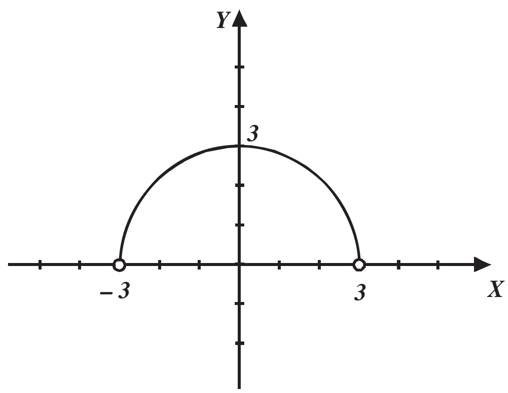
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ es continua en el intervalo $(-3, 3)$

Solución

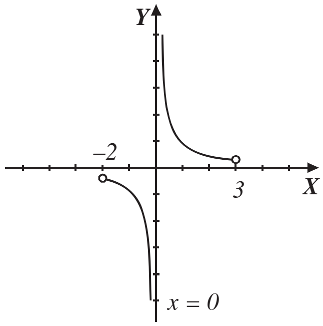
La función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ está definida en todos los puntos del intervalo $(-3, 3)$, como se ilustra en la gráfica, por consiguiente, $f(x)$ es continua en dicho intervalo.



2 ¿$f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en el intervalo $(-2, 3)$?

Solución

$f(x)$ no está definida en $x = 0$; entonces no es continua en este punto, por tanto, no es continua en el intervalo $(-2, 3)$



Continuidad en un intervalo cerrado

Una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b) y además

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

EJEMPLOS

1 Demuestra que $f(x) = x^2 - 2x$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 2]$

Demostración

La función $f(x)$ es polinomial, lo cual implica que está definida en el intervalo abierto $(-1, 2)$, por tanto, es continua en el intervalo, ahora se prueba la continuidad en los extremos del intervalo.

Para $x = -1$

a) $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 3$

b) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 - 2x) = 3$

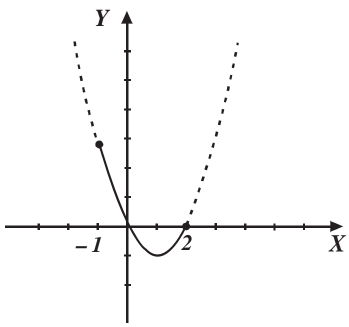
c) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

Para $x = 2$

a) $f(2) = (2)^2 - 2(2) = 0$

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 2x) = 0$

c) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$



$f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(-1, 2)$ y es continua a la derecha de -1 y a la izquierda de 2, entonces $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 2]$

2 ¿La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ es continua en el intervalo $[-2, 3]$?

Solución

Del intervalo $(-2, 3)$ la función $f(x)$ no es continua en $x = 0$, ya que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

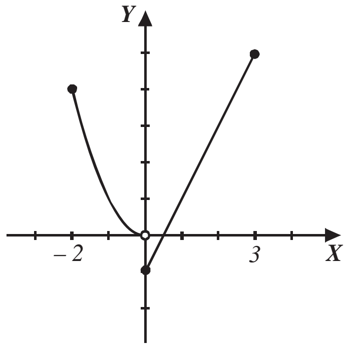
Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Si $f(x)$ no es continua en el intervalo abierto

$$(-2, 3)$$

Entonces, no es continua en el intervalo cerrado

$$[-2, 3]$$

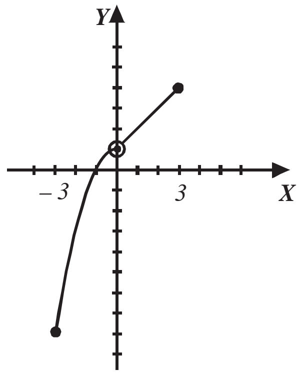


3 ¿La función $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 + x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ es continua en el intervalo $[-3, 3]$?

Solución

Se prueba la continuidad de la función en $x = 0$

1. $f(0) = 1 - (0)^2 = 1$
2. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 + (0) = 1$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 - (0)^2 = 1$
3. $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$



La función es continua en el intervalo $(-3, 3)$

Ahora se prueba la continuidad en los extremos:

Para $x = -3$

1. $f(-3) = 1 - (-3)^2 = 1 - 9 = -8$
2. $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1 - (3)^2 = 1 - 9 = -8$
3. $f(-3) = \lim_{x\to -3^+} f(x)$

Para $x = 3$

1. $f(3) = 1 + 3 = 1 + 3 = 4$
2. $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 1 + 3 = 1 + 3 = 4$
3. $f(3) = \lim_{x\to -3^-} f(x)$

La función es continua en $(-3, 3)$ y además es continua a la derecha de -3 y a la izquierda de 3, por tanto, es continua en el intervalo $[-3, 3]$

Continuidad en un intervalo semiabierto

Para intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ se tiene que:

1. Una función $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $(a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b), y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$
2. Una función $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $[a, b)$ si es continua en el intervalo abierto (a, b), y $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ es continua en el intervalo semiabierto $(3, 6]$

Demostración

El dominio de la función se define $D_f = \{x \in R \mid x \neq 3\}$, por tanto $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(3, 6)$

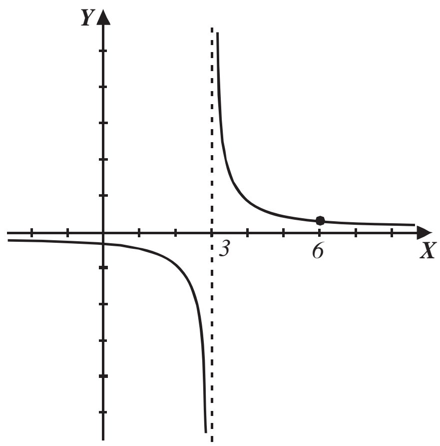
Se verifica la continuidad por la izquierda en 6

a) $f(6) = \dfrac{2}{6-3} = \dfrac{2}{3}$

b) $\lim_{x\to 6^-} f(x) = \lim_{x\to 6^-}\left(\dfrac{2}{x-3}\right) = \dfrac{2}{3}$

c) $\lim_{x\to 6^-} f(x) = f(6)$

Entonces, $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $(3, 6]$



2 ¿La función $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } 2 \le x < 3 \end{cases}$ es continua en el intervalo semiabierto $(-1, 3]$?

Solución

Se verifica la continuidad en $x = 2$

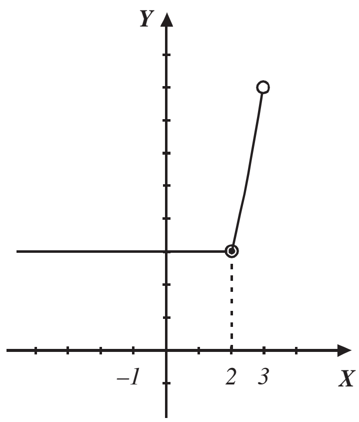
1. $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$
2. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3;\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3,$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

3. $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$, la función es continua en $(-1, 3)$

Se prueba la continuidad por la izquierda en $x = 3$

1. $f(3)$ no está definida, por tanto, la función no es continua en el intervalo $(-1, 3]$



3 Verifica la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ -x^2 + 4x & \text{si } 0 < x < 4 \end{cases}$ en $[-2, 4)$

Solución

Se verifica la continuidad en $x = 0$

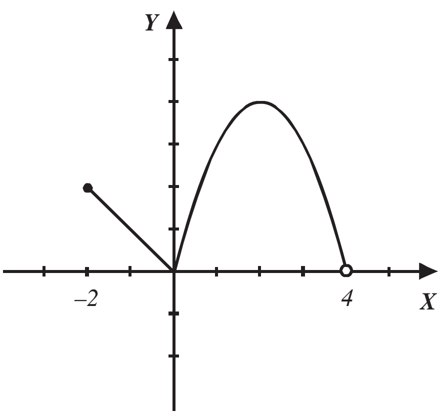
1. $f(0) = -(0) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} (-x^2 + 4x) = 0$
3. Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

La función es continua en el intervalo $(-2, 4)$

Se prueba la continuidad por la derecha para $x = -2$

1. $f(-2) = -(-2) = 2$
2. $\lim\limits_{x\to -2^+} (-x) = -(-2) = 2$
3. $f(-2) = \lim\limits_{x\to -2^+} (-x)$

Por tanto, la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[-2, 4)$



EJERCICIO **26**

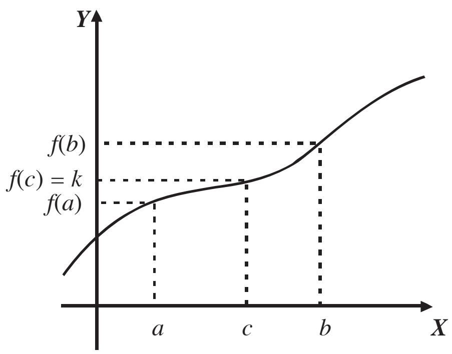
Verifica si son continuas las siguientes funciones en los intervalos indicados:

1. $f(x) = 3x + 2$ en $[0, 3)$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ en $(-1, 3)$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ en $[-3, 3]$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} - 3$ en $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$
5. $f(x) = x^2 - x^3$ en $[-2, 0]$
6. $f(x) = \sqrt{x+3}$ en $[-3, 1]$
7. $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x < 1 \\ 4x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $[-2, 4]$
8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $[-3, 4]$
9. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $(0, 3)$
10. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ en $(-2, 5)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teorema del valor intermedio

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, y k un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.



EJEMPLOS

1 Si $f(x) = 3x - 2$ es una función definida en el intervalo $[-2, 3]$, obtén el valor de c que cumpla con el teorema del valor intermedio cuando $k = 1$

Solución

Al aplicar el teorema se obtiene:

$$f(c) = k \rightarrow 3c - 2 = 1 \rightarrow 3c = 3 \rightarrow c = 1$$

Por consiguiente, $c = 1$ cuando $k = 1$

2 Dada la función $g(x) = x^2 - 3x - 2$, definida en el intervalo $[1, 4]$, determina el valor de k que cumpla con el teorema del valor intermedio cuando $c = 3$

Solución

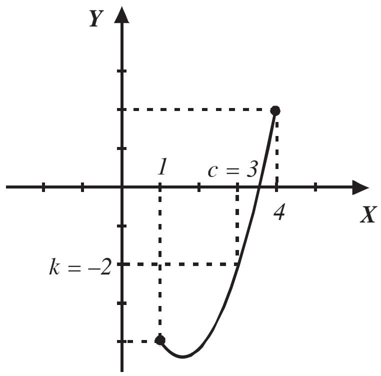
Se aplica el teorema:

$$f(c) = k \rightarrow c^2 - 3c - 2 = \text{k}$$

Pero, $c = 3$ y al sustituir se obtiene el valor de k

$$(3)^2 - 3(3) - 2 = k \rightarrow k = -2$$

entonces, $k = -2$



EJERCICIO 27

Aplica el teorema del valor intermedio y encuentra el valor de *c* en los siguientes ejercicios:

1. $f(x) = 3x - 5$; $[-2, 4]$ con $k = 1$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+4}$; $[-3, 3]$ con $k = 2$
3. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$; $[0, 5]$ con $k = 2$
4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ -2x+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; $[-2, 4]$ con $k = 0$
5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-x} & \text{si } x \leq 5 \\ x^2 - 25 & \text{si } x > 5 \end{cases}$; $[0, 8]$ con $k = 0$

Aplica el teorema del valor intermedio y determina el valor de *k* en los siguientes ejercicios:

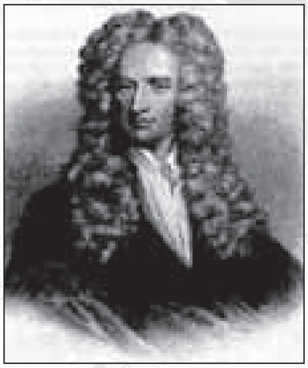
6. $f(x) = 3x^3 - 2x^2$; $[-2, 0]$, $c = -1$
7. $f(x) = \sqrt{x^2+9}$; $[-6, 0]$, $c = -4$
8. $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$; $[1, 5]$, $c = 2$
9. $f(x) = \cos x$; $[0, 2\pi]$, $c = \dfrac{\pi}{4}$
10. $f(x) = \log(3 + x)$; $[1, 12]$, $c = 7$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 4

LA DERIVADA

Reseña HISTÓRICA



En un periodo de menos de dos años, cuando Newton tenía menos de 25 años, comenzó con avances revolucionarios en matemática, óptica, física y astronomía.

Mientras Newton estaba en casa (debido a una peste que cerró la Universidad de Cambridge) estableció las bases del cálculo diferencial e integral. El método de las fluxiones, como él lo llamó, estaba basado en su crucial visión de que la integración de una función era el procedimiento inverso de su derivación.

Al considerar a la derivación como la operación básica, Newton produjo sencillos métodos analíticos que unificaban muchas técnicas diferentes desarrolladas previamente para resolver problemas, en apariencia no relacionados, como calcular áreas, tangentes, longitud de curvas y los máximos y mínimos de funciones. El *De Methodis Serierum et Fluxionum* de Newton fue escrito en 1671, pero Newton no pudo publicarlo y no apareció impreso hasta que John Colson produjo una traducción al inglés en 1736.

Sir Isaac Newton
(1643-1727)

Definición

Sea $f(x)$ una función, se define a su derivada $f'(x)$, como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

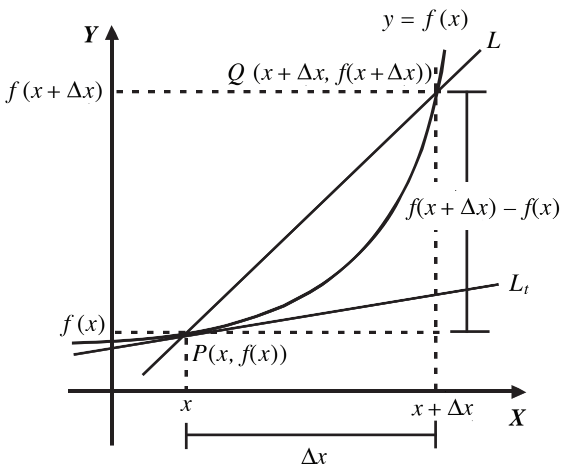
Para toda x, siempre que el límite exista y se representa por:

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx} \text{ o } D_x y$$

Interpretación geométrica

El valor de la derivada en cualquier punto de la curva es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto.
Donde:

Δx: incremento en x
Δy: incremento en y



En la gráfica se observa que la pendiente de la recta L es:

$$m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si Δx tiende a cero, la recta L coincide con L_t, entonces la pendiente de L_t será el límite de m_t.

$$\lim_{\Delta x \to 0} m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por definición, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Regla de los cuatro pasos

Sea una función $y = f(x)$, entonces:

1. $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (razón de cambio)

4. $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (derivada de la función)

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la derivada de la función $f(x) = 5x - 6$

Solución

Se aplica la regla de los cuatro pasos y se obtiene:

1. $y + \Delta y = 5(x + \Delta x) - 6$

2. $\Delta y = (5x + 5\Delta x - 6) - (5x - 6)$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(5x + 5\Delta x - 6) - (5x - 6)}{\Delta x} = \dfrac{5x + 5\Delta x - 6 - 5x + 6}{\Delta x} = \dfrac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 5 = 5$ (derivada de la función)

Este resultado se obtiene también cuando se utiliza la definición, como sigue:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[5(x + \Delta x) - 6] - (5x - 6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x + 5\Delta x - 6 - 5x + 6}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (5) = 5$$

Por tanto, la derivada de la función $f(x) = 5x - 6$ es: $f'(x) = 5$

2 Aplica la definición y determina la derivada de $y = 7x^2 - 5x + 9$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[7(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 9] - (7x^2 - 5x + 9)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2) - 5x - 5\Delta x + 9 - 7x^2 + 5x - 9}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7x^2 + 14x\Delta x + 7\Delta x^2 - 5x - 5\Delta x + 9 - 7x^2 + 5x - 9}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{14x\Delta x + 7\Delta x^2 - 5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (14x + 7\Delta x - 5) = 14x - 5$$

Por consiguiente, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = 14x - 5$$

3 Encuentra la derivada de la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+5}$, aplica la definición.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2(x+\Delta x)-1}{x+\Delta x+5} - \dfrac{2x-1}{x+5}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2x+2\Delta x-1}{x+\Delta x+5} - \dfrac{2x-1}{x+5}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(x+5)(2x+2\Delta x-1)-(2x-1)(x+\Delta x+5)}{(x+\Delta x+5)(x+5)}}{\Delta x} \quad \text{al simplificar,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x+5)(x+5)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11}{(x+\Delta x+5)(x+5)} \quad \text{se resuelve el límite}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{11}{(x+5)^2}$$

4 ¿Cuál es la derivada de la función $y = \sqrt{x+2}$?

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}}{\Delta x} \quad \text{se racionaliza la expresión}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x+2-x-2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$$

De tal manera que, al resolver el límite se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

EJERCICIO 28

Deriva las siguientes funciones, utiliza la definición.

1. $y = 3x + 2$
2. $y = 2a - bx$
3. $y = x^2$
4. $f(x) = 3x^2 - 5x$
5. $y = ax^2 + bx + c$
6. $y = x^3$
7. $y = x^3 - x^2$
8. $y = \dfrac{4x^2 - 16}{x - 2}$
9. $y = \dfrac{2x}{x - 1}$
10. $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$
12. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
13. $f(x) = \sqrt{x - 2}$
14. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
15. $y = \sqrt[3]{2x + 1}$
16. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
17. $y = \sqrt[3]{x}$
18. $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x - 1}}$
19. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 3}}$
20. $y = \sqrt[n]{x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fórmulas para determinar la derivada de una función algebraica

La forma directa de obtener la derivada de una función algebraica es la aplicación de las siguientes fórmulas:

1. $\dfrac{d}{dx} c = 0$
2. $\dfrac{d}{dx} x = 1$
3. $\dfrac{d}{dx} cv = c\dfrac{dv}{dx}$
4. $\dfrac{d\left(u + v - w\right)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx} - \dfrac{dw}{dx}$
5. $\dfrac{d\,(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$
6. $\dfrac{d}{dx} v^n = nv^{n-1}\dfrac{dv}{dx}$
7. $\dfrac{d}{dx} \sqrt[n]{v} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{v^{n-1}}}\dfrac{dv}{dx}$
8. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{v} = \dfrac{1}{2\sqrt{v}}\dfrac{dv}{dx}$
9. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
10. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$
11. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{v}\right) = -\dfrac{c}{v^2}\dfrac{dv}{dx}$
12. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{c}\right) = \dfrac{1}{c}\dfrac{dv}{dx}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la derivada de la función $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$?

Solución

Al aplicar las fórmulas respectivas se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 - 4x + 5) &= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(2x^2) - \frac{d}{dx}(4x) + \frac{d}{dx}(5)\\ &= \frac{d}{dx}(x^3) + 2\frac{d}{dx}(x^2) - 4\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)\\ &= 3x^2 + 2(2x) - 4(1) = 3x^2 + 4x - 4\end{aligned}$$

2 Deriva la función $y = \sqrt[3]{x^2}$

Solución

Aplicamos el hecho de que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ y posteriormente $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

3 Calcula la derivada de la función $s = \dfrac{1}{\sqrt[5]{t}}$

Solución

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{t}}\right) = \frac{d}{dt}\left(t^{-\frac{1}{5}}\right) = -\frac{1}{5}t^{-\frac{1}{5}-1} = -\frac{1}{5}t^{-\frac{6}{5}} = -\frac{1}{5t^{\frac{6}{5}}} = -\frac{1}{5\sqrt[5]{t^6}}$$

pero $\sqrt[5]{t^6} = \sqrt[5]{t^5 \cdot t} = t\sqrt[5]{t}$, por tanto $\dfrac{ds}{dt} = -\dfrac{1}{5t\sqrt[5]{t}}$

4 Obtén la derivada de la función $y = \dfrac{4}{x}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{d}{dx}(4x^{-1}) = 4\frac{d}{dx}(x^{-1}) = 4(-1x^{-1-1}) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$$

5 Determina la derivada de la función $y = 2\sqrt[3]{x} - \dfrac{7}{\sqrt{x}}$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{3}} - 7x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{d}{dx}\left(7x^{-\frac{1}{2}}\right) = 2\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - 7\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)\\ &= 2\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\right) - 7\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{7}{2}x^{-\frac{3}{2}}\\ &= \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{7}{2x\sqrt{x}}\end{aligned}$$

6 ¿Cuál es la derivada de la función $y = (3x^2 - x)^7$?

Solución

Se aplica la fórmula $\dfrac{d(v^n)}{dx} = nv^{n-1}\dfrac{dv}{dx}$ y se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 7(3x^2 - x)^6 \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - x) = 7(3x^2 - x)^6 \cdot \left(\frac{d3x^2}{dx} - \frac{dx}{dx}\right) = 7(3x^2 - x)^6(6x - 1)$$

$$= (42x - 7)(3x^2 - x)^6$$

7 Encuentra la derivada de la función $s = \sqrt[3]{8 + 4t - t^3}$

Solución

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(8 + 4t - t^3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(8 + 4t - t^3)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \frac{d}{dt}(8 + 4t - t^3) = \frac{1}{3}(8 + 4t - t^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4 - 3t^2)$$

$$= \frac{4 - 3t^2}{3(8 + 4t - t^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{4 - 3t^2}{3\sqrt[3]{(8 + 4t - t^3)^2}}$$

8 Deriva la función $y = -\dfrac{5}{\left(\sqrt{x} - x\right)^3}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[-\frac{5}{\left(\sqrt{x} - x\right)^3}\right] = \frac{d}{dx}\left[-5\left(\sqrt{x} - x\right)^{-3}\right] = -5\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} - x\right)^{-3}$$

$$= -5\left[-3\left(\sqrt{x} - x\right)^{-4} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} - x\right)\right]$$

$$= 15\left(\sqrt{x} - x\right)^{-4} \cdot \left(\frac{d}{dx}\sqrt{x} - \frac{d}{dx}x\right)$$

$$= \frac{15}{\left(\sqrt{x} - x\right)^4}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right)$$

$$= \frac{15}{\left(\sqrt{x} - x\right)^4}\left(\frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{15\left(1 - 2\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - x\right)^4}$$

9 Calcula la derivada de la función $y = x\sqrt{x+1}$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x+1}\right) = x\frac{d}{dx}\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}\frac{dx}{dx} = x\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) + \sqrt{x+1} = \frac{x}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}$$

$$= \frac{x+2(x+1)}{2\sqrt{x+1}} = \frac{x+2x+2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

Por consiguiente, $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

10 Obtén la derivada de la función $f(x) = \frac{x^2-5}{1-3x^2}$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ y se obtiene:

$$f'(x) = \frac{(1-3x^2)(2x)-(x^2-5)(-6x)}{(1-3x^2)^2} = \frac{2x-6x^3+6x^3-30x}{(1-3x^2)^2} = -\frac{28x}{(1-3x^2)^2}$$

EJERCICIO **29**

Deriva las siguientes funciones:

1. $y = -10$
2. $y = 5$
3. $f(x) = a^2$
4. $s(t) = b^2$
5. $y = 6x$
6. $y = \frac{3}{4}x$
7. $f(x) = ax$
8. $s(t) = b^2t$
9. $f(x) = 5x\sqrt{2}$
10. $y = ax\sqrt{b}$
11. $f(x) = x^5$
12. $f(x) = 4x^3$
13. $s(t) = \frac{1}{5}t^4$
14. $y = x^{\frac{9}{2}}$
15. $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$
16. $y = 6x^{\frac{3}{2}}$
17. $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$
18. $f(x) = 4x^{\frac{1}{4}}$
19. $f(x) = \sqrt{x}$
20. $s(t) = \sqrt[4]{t}$
21. $f(x) = 5\sqrt[5]{x}$
22. $f(x) = \frac{x^5}{7}$

23. $f(x) = \frac{x^4}{9}$

24. $s(t) = \frac{t^3}{a}$

25. $f(x) = \frac{5}{x^4}$

26. $f(x) = \frac{2}{x^6}$

27. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$

28. $s(t) = \frac{\sqrt[3]{t}}{5}$

29. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$

30. $s(t) = \frac{5}{\sqrt[4]{t}}$

31. $f(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

32. $f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 3x - 12$

33. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - x - 6$

34. $f(x) = 5x^2 + 4x + 4mn - 2$

35. $f(x) = 3ax^4 - 4ax^3 - 5bx^2 + 7cx$

36. $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{5} - \frac{4x}{9} - \frac{1}{5}$

37. $s(t) = \frac{t^5}{6} - \frac{t^4}{5} + \frac{t^3}{4} - \frac{t^2}{7} + \frac{t}{9} - \frac{2}{3}$

38. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{x}{a} + \frac{c}{b}$

39. $s(t) = \frac{4}{t^2} - \frac{5}{t} - \frac{9}{5}$

40. $f(x) = \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^3} - \frac{7}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{1}{5}$

41. $s(t) = \frac{t^3}{5} - \frac{2}{t^2} + \frac{6}{t} - \frac{3}{5}$

42. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{5} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

43. $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 3x + 2}{x}$

44. $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{3}{2}}$

45. $f(x) = 8\sqrt{x} + 9\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[2]{x^3}$

46. $f(x) = ax^n + bx^{n-1}$

47. $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{5x}{7} - \frac{8}{5}$

48. $f(x) = a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[3]{x}$

49. $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{\sqrt[4]{x^5}}{3}$

50. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{x^5}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^{-1}}$

51. $f(x) = \frac{7}{x^{-2}} + \frac{5}{x^{-3}}$

52. $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} - 2x$

53. $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 8}{\sqrt[3]{x}}$

54. $y = \sqrt{x^{-1}}\left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)$

55. $y = (3x - 4)^5$

56. $y = (2 - 4x)^3$

57. $y = (3x^6 - 2x^4)^4$

58. $y = \left(4x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)^3$

59. $y = \sqrt{5 - 3x^2}$

60. $y = \sqrt[3]{x^3 + 2}$

61. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{-1}$

62. $y = \frac{2}{3}\sqrt{2x^2 + 6x}$

63. $y = \left(\frac{x}{3} + 6\sqrt{x}\right)^3$

64. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 - 2}$

65. $f(x) = (x^2 + 5x - 3)^3$

66. $y = \sqrt[3]{(2x-3)^2}$

67. $y = \sqrt{\sqrt{4x+3}}$

68. $f(x) = \left(\frac{1}{3}x + 2\right)^3$

69. $y = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

70. $f(z) = \sqrt{z^2 - 4}$

71. $y = \sqrt[3]{x^6 + 3x}$

72. $y = \left(4x^2 - \frac{1}{2}x\right)(9x+8)$

73. $y = (5x-3)\left(4x - \frac{3}{x}\right)$

74. $y = x^3(3x+1)$

75. $f(x) = x\sqrt{2x+1}$

76. $y = \frac{x}{3}(2x+1)^3$

77. $y = x^2\sqrt{x-1}$

78. $f(x) = (3x^2 - 5)^4(2x^2 + 1)^3$

79. $f(\theta) = (\theta^2 + 1)^3(\theta^3 - 2)^2$

80. $s = \frac{\sqrt{4-3t}}{t^{-1}}$

81. $s(t) = t^3\left(\frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}\right)^2$

82. $f(x) = \frac{6}{2-4x}$

83. $f(t) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}$

84. $f(r) = \frac{r^2 - 3}{\sqrt{r^2 - 4}}$

85. $f(t) = \frac{6t-3}{5t+8}$

86. $f(z) = \frac{6-3z}{5-6z}$

87. $f(x) = \frac{ax + b}{ax - b}$

88. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{3x}}{3}$

89. $f(t) = \sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}}$

90. $f(w) = \left(\frac{w-3}{w+2}\right)^2$

91. $f(\theta) = \frac{6(2-\theta^3)}{3-2\theta}$

92. $f(s) = \frac{s^2 - 2}{s^2 - 6s}$

93. $f(x) = \frac{5x^2}{2\sqrt{b^2 + x^2}}$

94. $f(t) = \frac{(9t-6)^3}{(27-3t)^2}$

95. $f(x) = \frac{4xb}{2a-6x}$

96. $f(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$

97. $y = \frac{2}{\sqrt{x^4 - a^4}}$

98. $y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+3}}$

99. $y = (2x+3)\sqrt{x^2 + 3x}$

100. $y = \frac{x\sqrt{x+1}}{x+1}$

101. $y = \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x-3}}$

102. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x^3-1}}$

103. $y = \dfrac{\sqrt{x^n+1}}{\sqrt{x^n-1}}$

104. $y = \dfrac{\sqrt[m]{x^n}}{\sqrt[m]{x^n}-1}$

105. $y = \dfrac{x\sqrt{2x+1}}{\sqrt{4-5x}}$

106. $y = 2x\sqrt[3]{\dfrac{2x^3+1}{2x^3-1}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Regla de la cadena

Sea $y = g(u)$, $u = f(x)$, entonces la derivada de $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, se define:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = u^2 - 9$; $u = x^2 + 1$

Solución

Por definición $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$, entonces $\dfrac{dy}{du} = 2u$ y $\dfrac{du}{dx} = 2x$, por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = (2u)(2x) = 4ux = 4(x^2+1)x = 4x(x^2+1)$$

2 Obtén $\dfrac{d}{dx}(y \circ u \circ v)$, si $y = u^3$, $u = \dfrac{v-1}{v+1}$, $v = \sqrt{x^2-1}$

Solución

Cuando hay más de dos funciones, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Luego:

$$\frac{dy}{du} = 3u^2,\ \frac{du}{dv} = \frac{2}{(v+1)^2} \quad \text{y} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Por consiguiente, el resultado es:

$$\frac{d}{dx}(y \circ u \circ v) = \left[3u^2\right]\left[\frac{2}{(v+1)^2}\right]\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right] = \frac{6u^2x}{(v+1)^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{6\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)^2 x}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^4\sqrt{x^2-1}}$$

3 Deriva la función $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2+8}$, utilizando la regla de la cadena.

Solución

Al tomar $u=x^3-2x^2+8$, entonces $y=\sqrt[3]{u}$, luego:

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}=3x^2-4x$$

Al utilizar la regla de la cadena, se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\right]\left[3x^2-4x\right]=\frac{3x^2-4x}{3\sqrt[3]{u^2}}=\frac{3x^2-4x}{3\sqrt[3]{(x^3-2x^2+8)^2}}$$

EJERCICIO 30

Determina $\frac{dy}{dx}$, para las siguientes funciones:

1. $y=u^2-u,\ u=\frac{1}{x}$
2. $y=\sqrt{\frac{u-1}{u+1}},\ u=\sqrt{x}$
3. $y=\sqrt{2u^3-3u},\ u=x^2-1$
4. $y=\frac{3}{u^3}-\frac{2}{u^2},\ u=x+1$
5. $y=\frac{u}{u^2-1},\ u=x^3-6x^2-8x$
6. $y=\sqrt{(2x-1)^5+(2x-1)^3}$
7. $y=\sqrt{\frac{x^3-1}{x^3+1}}$
8. $y=\frac{u+1}{u-1},\ u=\frac{v+2}{v-2},\ v=\sqrt{x^2-1}$
9. $y=\sqrt{u-1},\ u=\frac{v^2}{v^2-1},\ v=\sqrt{x}$
10. $y=\frac{1}{\sqrt{u}},\ u=\sqrt{\frac{v-1}{v+1}},\ v=(x^2+3)^2$
11. $y=u^2+1,\ u=\sqrt{v},\ v=\frac{x+1}{x-1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de funciones trascendentes

Se clasifican en funciones trigonométricas directas e inversas, logarítmicas y exponenciales, por ejemplo:

$y=\text{sen } 3\sqrt{x}$ $\qquad y=\tan(e^x-\ln x)$

$y=\ln\sqrt{2x-1}$ $\qquad y=3^{x-x2}$

$y=e^{\cos x}$ $\qquad y=\text{arc sen}(x-2)$

Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\text{sen } v=\cos v\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\cot v=-\csc^2 v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cos v=-\text{sen } v\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\sec v=\sec v\ \tan v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tan v=\sec^2 v\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\csc v=-\csc v\ \cot v\frac{dv}{dx}$$

Inversas trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sen} v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\ cot}\ v = -\frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\ cos}\ v = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\ sec}\ v = \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\ tan}\ v = \frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\ csc}\ v = -\frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Logarítmicas

$$\frac{d}{dx}\ln v = \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\log_b v = \frac{\log_b e}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Exponenciales

$$\frac{d}{dx}e^v = e^v\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}a^v = a^v\ln a\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}u^v = v\cdot u^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln u\cdot u^v\frac{dv}{dx}$$

Derivadas de funciones trigonométricas

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la derivada de las siguientes funciones:

$$y = \operatorname{sen} 5x^2,\ y = \tan 6x,\ y = \csc 4x^3$$

Solución

Se aplican las fórmulas $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} v = \cos\ v\frac{dv}{dx}$, $\frac{d}{dx}\tan\ v = \sec^2\ v\frac{dv}{dx}$, $\frac{d}{dx}\csc\ v = -\csc\ v\ \cot\ v\frac{dv}{dx}$ a cada una de las funciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} 5x^2 = \cos 5x^2\left(\frac{d}{dx}5x^2\right) = \cos 5x^2(10x) = 10x\cos 5x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan 6x = \sec^2 6x\left(\frac{d}{dx}6x\right)\sec^2 6x(6) = 6\sec^2 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\csc 4x^3 = -\csc 4x^3\cot 4x^3\left(\frac{d}{dx}4x^3\right) = -\csc 4x^3\cot 4x^3(12x^2) = -12x^2\csc 4x^3\cot 4x^3$$

2 Deriva la función $y = 4\cos(x^2-1)$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\cos\ v = -\operatorname{sen} v\frac{dv}{dx}$, con $v = x^2-1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}4\cos(x^2-1) = 4\frac{d\cos(x^2-1)}{dx} = 4\left[-\operatorname{sen}(x^2-1)\frac{d(x^2-1)}{dx}\right] = -4\operatorname{sen}(x^2-1)\cdot 2x$$

por tanto, $\frac{dy}{dx} = -8x\cdot\operatorname{sen}(x^2-1)$

3 Encuentra la derivada de la función $y = \dfrac{\text{sen } x - \cos x}{\text{sen } x + \cos x}$

Solución

Primero se aplica la fórmula del cociente de funciones:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\text{sen } x + \cos x)\dfrac{d(\text{sen } x - \cos x)}{dx} - (\text{sen } x - \cos x)\dfrac{d(\text{sen } x + \cos x)}{dx}}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$$

Se derivan las funciones con las fórmulas para la función seno y coseno:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\text{sen } x + \cos x)\left[\dfrac{d\,\text{sen } x}{dx} - \dfrac{d\cos x}{dx}\right] - (\text{sen } x - \cos x)\left[\dfrac{d\,\text{sen } x}{dx} + \dfrac{d\cos x}{dx}\right]}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\text{sen } x + \cos x)(\cos x + \text{sen } x) - (\text{sen } x - \cos x)(\cos x - \text{sen } x)}{(\text{sen } x + \cos x)^2} = \frac{(\text{sen } x + \cos x)^2 + (\cos x - \text{sen } x)^2}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen } x \cos x + \cos^2 x + \cos^2 x - 2\,\text{sen } x \cos x + \text{sen}^2 x}{(\text{sen } x + \cos x)^2} = \frac{2(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$$

Se aplica la identidad trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$$

4 Determina la derivada de la función $r = \tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)$

Solución

Se expresa $\tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) = \left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^3$ y se aplica la fórmula $\dfrac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\dfrac{dv}{dx}$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta} = \frac{d\left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^3}{d\theta} = 3\left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^2 \cdot \frac{d\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta}$$

Se deriva la tangente con la fórmula $\dfrac{d}{dx}\tan v = \sec^2 v\dfrac{dv}{dx}$ y se simplifican los resultados:

$$\frac{dr}{d\theta} = 3\tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \frac{d\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = 3\tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\theta}} - 1\right) = 3\tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\left(\frac{1 - 2\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}}\right)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \left(\frac{3 - 6\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}}\right) \cdot \tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)$$

5 Deriva la función $s = \cos 2t \cdot \operatorname{sen} 4t$

Solución

Se aplica la fórmula para derivar un producto $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(\cos 2t \operatorname{sen} 4t)}{dt} = \cos 2t \cdot \frac{d \operatorname{sen} 4t}{dt} + \operatorname{sen} 4t \cdot \frac{d\cos 2t}{dt}$$

Se deriva el seno y coseno con sus respectivas fórmulas y se obtiene el resultado:

$$\frac{ds}{dt} = \cos 2t \cdot \left[\cos 4t \frac{d(4t)}{dt}\right] + \operatorname{sen} 4t \cdot \left[-\operatorname{sen} 2t \frac{d(2t)}{dt}\right] = \cos 2t\ \left[4\cos 4t\right] + \operatorname{sen} 4t\ \left[-2 \operatorname{sen} 2t\right]$$

$$\frac{ds}{dt} = 4\cos 2t \cos 4t - 2 \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} 4t$$

6 ¿Cuál es la derivada de la función $y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\,\frac{d(1)}{dx} - 1\frac{d\sqrt{\operatorname{sen} x}}{dx}}{\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)^2}$$

Se realizan las respectivas derivadas:

$$\frac{d(1)}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\sqrt{\operatorname{sen} x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}(\cos x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

Se sustituyen y se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\,(0) - 1\left(\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\right)}{\operatorname{sen} x} = \frac{\frac{-\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{\frac{\operatorname{sen} x}{1}} = -\frac{\cos x}{2 \operatorname{sen} x\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

EJERCICIO 31

Deriva las siguientes funciones trigonométricas:

1. $y = \operatorname{sen} 8x$
2. $f(x) = \cos 3x^2$
3. $f(x) = \tan x^3$
4. $s(t) = \sec 6t$
5. $f(x) = \cot 4x^3$
6. $f(x) = \csc 9x$
7. $f(x) = \cos ax$
8. $s(t) = \tan bt^2$

9. $f(x) = 6 \sec x^2$

10. $f(x) = \frac{1}{2} \csc \frac{x}{4}$

11. $f(x) = a \cos 3x$

12. $f(x) = \cot(3x - 5)$

13. $f(x) = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

14. $f(x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$

15. $s(t) = \tan(at + \pi)$

16. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

17. $s(t) = \operatorname{sen} \sqrt{t}$

18. $f(x) = \cot \sqrt[3]{x}$

19. $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

20. $s(t) = \cos \frac{1}{t^3}$

21. $f(x) = \sec \frac{1}{\sqrt{x}}$

22. $f(x) = \tan 3x - 3x$

23. $f(x) = ax + \cot ax$

24. $f(x) = \operatorname{sen}(x - 1)^2$

25. $s(t) = \cos(3t^2 + 2)^3$

26. $f(x) = 4 \cot \sqrt{x-1}$

27. $f(x) = \tan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

28. $f(x) = \sec\left(\frac{ax+b}{ax-b}\right)$

29. $f(x) = \operatorname{sen}^2 5x$

30. $f(x) = \cos^3 bx$

31. $f(x) = \tan^4 3x^2$

32. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} 4x}$

33. $f(x) = \sqrt{\sec 5x^2}$

34. $f(x) = \sqrt[3]{3 \tan x^2}$

35. $f(x) = x \operatorname{sen} x$

36. $f(x) = x^2 \cos x^2$

37. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

38. $f(t) = \frac{\cos 5t^2}{t^2}$

39. $y = \operatorname{sen}(ax^2)$

40. $y = a \cos (3x)$

41. $y = \tan \sqrt{x}$

42. $y = \frac{1}{6} \sec\ 3x^2$

43. $y = \frac{1}{2} \csc \frac{2x}{3}$

44. $y = x^2 + 3x - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

45. $y = -3\cot\ (1 - x^2)$

46. $y = \frac{2}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

47. $y = \operatorname{sen}^2(2\ bx)$

48. $y = \tan^4(2x - 1)^3$

49. $y = \sqrt{\sec 2x}$

50. $y = \sqrt[3]{3 \tan x^2}$

51. $y = x \cdot \cos^3 4x$

52. $y = \frac{x^2}{\operatorname{sen} ax}$

53. $y = x\sqrt{\csc 2x}$

54. $y = \dfrac{\cos(mx)}{\operatorname{sen}(nx)}$

55. $y = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}$

56. $y = x\cos x - \operatorname{sen} x$

57. $y = \sqrt{\dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1}}$

58. $y = x^2 \operatorname{sen} 2x - 4x\cos 2x - \operatorname{sen} 2x$

59. $y = \cos(2x - 1)\cdot\tan(1 - 2x)$

60. $y = x^2 \sec(\pi - x)$

61. $y = \left(\dfrac{3x \operatorname{sen} x}{3x+1}\right)^3$

62. $y = \cos\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

63. $y = \dfrac{1+\tan^2 x}{x\sec x}$

64. $y = \dfrac{x\,(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)}{\cos x}$

65. $y = 2\operatorname{sen} x\cos x$

66. $y = \dfrac{\csc x\cdot\tan x}{\cos x}$

67. $y = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

68. $y = \cos^2(3x+1) - \operatorname{sen}^2(3x+1)$

69. $y = \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}{x^2}$

70. $y = \dfrac{(1+\tan x)^2}{\sec x}$

71. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x + 1$

72. $y = 2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - x^2\cos x$

73. $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \dfrac{1}{64}\operatorname{sen} 8x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de funciones inversas trigonométricas

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Deriva la función $y = \operatorname{arc\,sen} x^2$

Solución

Se aplica la fórmula $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} v) = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\dfrac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{d\,(x^2)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,(2x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Por consiguiente, la derivada de la función es $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

2 ¿Cuál es la derivada de la función $y = \text{arc tan}\left(\sqrt{x}-1\right)$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(\text{arc tan}\, v) = \frac{1}{v^2+1}\cdot\frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{arc tan}\left(\sqrt{x}-1\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1}\cdot\frac{d\left(\sqrt{x}-1\right)}{dx} = \frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1\right]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left[x-2\sqrt{x}+2\right]}$$

3 Obtén la derivada de la función $r = \theta^2 \text{ arc sec } \theta$

Solución

$$\frac{dr}{d\theta} = \theta^2\frac{d}{d\theta}\text{ arc sec }\theta + \text{arc sec }\theta\frac{d\theta^2}{d\theta} = \theta^2\left[\frac{1}{\theta\sqrt{\theta^2-1}}\frac{d\theta}{d\theta}\right] + \text{arc sec }\theta(2\theta)$$

$$= \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2-1}} + 2\theta\,\text{arc sec}\,\theta$$

4 Determina la derivada de la función $y = \frac{\text{arc sen } x}{x}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d}{dx}(\text{arc sen}\,x) - (\text{arc sen}\,x)\frac{dx}{dx}}{x^2} = \frac{x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{dx}\right) - \text{arc sen}\,x}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \text{arc sen}\,x}{x^2} = \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{\text{arc sen}\,x}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\text{arc sen}\,x}{x^2}$$

EJERCICIO 32

Determina la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \text{arc sen } 5x$
2. $f(x) = \text{arc cos } 4x^2$
3. $f(x) = \text{arc tan } 3x$
4. $y = \text{arc cot } x^3$
5. $f(x) = \text{arc sec } x^2$
6. $f(x) = \text{arc csc } 3x^2$
7. $f(x) = \text{arc cos } \frac{x}{b}$
8. $f(x) = \text{arc sen } \frac{x}{4}$

9. $f(x) = \text{arc tan } \dfrac{x}{a}$

10. $f(x) = 2 \text{ arc sec } \sqrt{x}$

11. $y = \text{arc sen}(3 - x^2)$

12. $y = \text{arc} \cos \sqrt{1 - x^2}$

13. $y = x^2 \text{ arc tan } x$

14. $y = x \text{ arc} \operatorname{sen} x + \sqrt{1 - x^2}$

15. $y = 8 \text{ arc} \cot\left(\dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{x}\right) - \dfrac{x\sqrt{16 - x^2}}{2}$

16. $y = x \text{ arc} \csc(x^{-1}) + \text{arc} \tan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

17. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{2}\right) \text{arc tan } x - \dfrac{x}{2}$

18. $\varphi = \text{arc csc}\sqrt{\theta^2 - 1}$

19. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1 - 4x^2} + \dfrac{1}{4} \text{arc sen } 2x$

20. $y = \dfrac{x^3}{3} \text{arc sen } x + \left(\dfrac{x^2 + 2}{9}\right)\sqrt{1 - x^2}$

21. $f(r) = \sqrt{b^2 - r^2} + b \cdot \text{arc sen } \dfrac{r}{b}$

22. $y = x - \text{arc tan } x$

23. $y = \text{arc tan }(2x) + \text{arc sen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$

24. $y = \text{arc sen } \sqrt{x}$

25. $y = x \text{ arc cos}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

26. $y = \text{arc sen}(4ax - 4x^2)$

27. $f(r) = \text{arc sen}(r - 2)$

28. $y = \dfrac{1}{4} \text{arc tan } \left(\dfrac{2x + 1}{2}\right)$

29. $y = 4 \text{ arc sen } \left(\dfrac{x - 2}{2}\right) - \sqrt{4x - x^2}$

30. $y = 6 \text{ arc csc}\left(\dfrac{2}{x - 2}\right) - \dfrac{(x + 6)\sqrt{4x - x^2}}{2}$

31. $y = \dfrac{x - 1}{2}\sqrt{2x - x^2} + \dfrac{1}{2} \text{ arc sen } (x - 1)$

32. $s(t) = 3\sqrt{9 - t^2} + 2 \text{ arc sen } \dfrac{t}{3}$

33. $6y = 25 \text{ arc sen } \dfrac{3x}{5} + 3x\sqrt{25 - 9x^2}$

34. $w = 2\sqrt{\theta + 2} + \sqrt{2} \text{ arc tan}\sqrt{\dfrac{\theta + 2}{2}}$

35. $y = \dfrac{2}{3} \text{arc tan}\left(\dfrac{1}{3} \tan \dfrac{x}{2}\right)$

36. $y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{6} \text{arc tan}\left(2 \tan \dfrac{x}{2}\right)$

37. $y = \text{arc sen } \left(\cos \dfrac{x}{3}\right)$

38. $y = x \text{ arc cot}(\tan x)$

39. $y = \dfrac{\text{arc sec } (2x)}{\sqrt{4x^2 - 1}}$

40. $y = \text{arc sec}\left(2 \sec \dfrac{x}{2}\right)$

41. $y = 4 \text{ arc sen}\left(\dfrac{2x - 4}{3x + 2}\right)$

42. $s = t^2 \text{ arc cos}(1 - t) + 2t$

43. $y = \text{arc cos}(a + x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales

A continuación se enlistan las propiedades de los logaritmos, las cuales, al aplicarlas, simplifican la función al momento de obtener su derivada.

1. $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$
2. $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$
3. $\log_a A^n = n \cdot \log_a A$
4. $\log_a \sqrt[n]{A} = \dfrac{1}{n}\log_a A$
5. $\log^n{}_a A = (\log_a A)^n$

Las propiedades anteriores también se aplican a los logaritmos naturales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la derivada de la función $y = \ln x^2$

Solución

Al aplicar la fórmula $\dfrac{d \ln v}{dx} = \dfrac{1}{v}\dfrac{dv}{dx}$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln x^2}{dx} = \frac{1}{x^2}\frac{dx^2}{dx} = \frac{1}{x^2}(2x) = \frac{2}{x}$$

Por consiguiente, la derivada de la función es $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x}$

2 ¿Cuál es la derivada de $y = \ln^2(x^2 - x)$?

Solución

Se expresa la función como: $\ln^2(x^2 - x) = [\ln(x^2 - x)]^2$ y se aplica $\dfrac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\left(\dfrac{d}{dx}v\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\ln(x^2 - x)]^2 = 2\ \ln(x^2 - x)\frac{d \ln\ (x^2 - x)}{dx} = 2 \ln (x^2 - x)\cdot\frac{1}{x^2 - x}\ \frac{d(x^2 - x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\ \ln\ (x^2 - x)\ \frac{1}{x^2 - x}\cdot(2x - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\ \ln\ (x^2 - x)\frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\ (2x - 1)\cdot\ln\ (x^2 - x)}{x^2 - x} = \frac{4x - 2}{x^2 - x}\cdot\ln\ (x^2 - x)$$

3 Obtén la derivada de $y = x^2 \ln(mx)^2$

Solución

Se utiliza la fórmula del producto $\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 \ln(mx)^2) = x^2 \frac{d}{dx}\ln(mx)^2 + \ln(mx)^2 \frac{d}{dx}x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{(mx)^2}\frac{d}{dx}(mx)^2 + \ln(mx)^2 \cdot (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{(mx)^2} \cdot 2(mx)m + 2x \ \ln(mx)^2 = 2x + 2x\ln(mx)^2$$

Utilizando $\log_a A^n = n \log_a A$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2x(2\ln(mx)) = 2x + 4x\ln(mx) = 2x[1 + 2\ln(mx)]$$

4 Determina la derivada de la función $y = \ln(\text{sen } x)$

Solución

Se deriva la función y mediante identidades trigonométricas se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(\text{sen } x) = \frac{1}{\text{sen } x}\cdot\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \frac{1}{\text{sen } x}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \cot x$$

5 Deriva $y = \ln\left(\frac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen } x}\right)$

Solución

Al aplicar las propiedades de los logaritmos se obtiene: $y = \ln(1 + \text{sen } x) - \ln(1 - \text{sen } x)$
Se deriva la función:

$$y' = \frac{d}{dx}\ln(1+\text{sen } x) - \frac{d}{dx}\ln(1-\text{sen } x) = \left(\frac{1}{1+\text{sen } x}\right)\frac{d}{dx}(1+\text{sen } x) - \left(\frac{1}{1-\text{sen } x}\right)\frac{d}{dx}(1-\text{sen } x)$$

$$y' = \left(\frac{1}{1+\text{sen } x}\right)(\cos x) - \left(\frac{1}{1-\text{sen } x}\right)(-\cos x) = \frac{\cos x}{1+\text{sen } x} + \frac{\cos x}{1-\text{sen } x}$$

$$y' = \frac{\cos x\ (1+\text{sen } x) + \cos x(1-\text{sen } x)}{(1+\text{sen } x)(1-\text{sen } x)} = \frac{\cos x + \cos x \text{ sen } x + \cos x - \cos x \text{ sen } x}{(1+\text{sen } x)(1-\text{sen } x)}$$

$$y' = \frac{2\cos x}{1-\text{sen}^2 x} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x} = 2\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 2\sec x$$

6 ¿Cuál es la derivada de la función $y = e^{2x-1}$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}e^v = e^v\frac{dv}{dx}$ y se obtiene: $\frac{dy}{dx} = e^{2x-1}\cdot\frac{d}{dx}(2x-1) = e^{2x-1}\cdot 2 = 2e^{2x-1}$

pero $y = e^{2x-1}$ por tanto $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x-1} = 2y$

7 Determina la derivada de la función $y = 3\sqrt{e^{\cos x}}$

Solución

La función se puede expresar como $y = 3(e^{\cos x})^{\frac{1}{2}} = 3e^{\frac{1}{2}\cos x}$, se deriva:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3e^{\frac{1}{2}\cos x}\right) = 3e^{\frac{1}{2}\cos x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cos x\right) = 3e^{\frac{1}{2}\cos x}\cdot\left(\frac{1}{2}(-\operatorname{sen} x)\right) = -\frac{3}{2}\operatorname{sen} x\cdot e^{\frac{1}{2}\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}\operatorname{sen} x\cdot\sqrt{e^{\cos x}}$$

8 Obtén la derivada de $y = x^3\cdot e^{\sqrt{x}}$

Solución

Se utiliza la fórmula del producto $\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3\cdot e^{\sqrt{x}}\right) = x^3\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}x^3 = x^3\cdot e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}\cdot(3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3x^2\cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}} + 3x^2\cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+6\right)$$

9 ¿Cuál es la derivada de $y = 5^{x^2+5x-7}$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}a^v = a^v\cdot\ln a\frac{dv}{dx}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5^{x^2+5x-7}) = 5^{x^2+5x-7}\cdot\ln 5\cdot\frac{d}{dx}(x^2+5x-7)\\ &= 5^{x^2+5x-7}\cdot\ln 5\cdot(2x+5)\\ &= (2x+5)\cdot 5^{x^2+5x-7}\cdot\ln 5\end{aligned}$$

10 Encuentra la derivada de la función $y = (\operatorname{sen} x)^{e^x}$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}u^v = v\cdot u^{v-1}\cdot\frac{du}{dx} + \ln u\cdot u^v\cdot\frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\operatorname{sen} x)^{e^x-1}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \ln(\operatorname{sen} x)\cdot(\operatorname{sen} x)^{e^x}\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\operatorname{sen} x)^{e^x}(\operatorname{sen} x)^{-1}(\cos x) + \ln(\operatorname{sen} x)\cdot(\operatorname{sen} x)^{e^x}(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\operatorname{sen} x)^{e^x}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) + \ln(\operatorname{sen} x)\cdot(\operatorname{sen} x)^{e^x}(e^x) = e^x(\operatorname{sen} x)^{e^x}\cot x + e^x(\operatorname{sen} x)e^x\ln(\operatorname{sen} x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\operatorname{sen} x)^{e^x}[\cot x + \ln(\operatorname{sen} x)]$$

EJERCICIO 33

Obtén la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \ln x^3$
2. $f(x) = \ln 4x^2$
3. $f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 2)$
4. $f(x) = \ln\sqrt{x}$
5. $f(x) = \log x^6$
6. $f(x) = \log 5x^3$
7. $f(x) = \log_3 x$
8. $f(x) = \log_4 \sqrt[3]{x}$
9. $f(x) = \ln^4 x$
10. $f(x) = \ln^3 5x$
11. $y = x^2 \ln x$
12. $y = x \ln x^2$
13. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
14. $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{x}$
15. $y = \ln\sqrt{b - ax}$
16. $f(x) = \ln x^2\sqrt{3x^2 - 1}$
17. $f(x) = \ln ax\sqrt{ax^2 - b}$
18. $y = \ln\left(\dfrac{3x-5}{2x+1}\right)$
19. $y = \ln\sqrt{\dfrac{cx-b}{cx+b}}$
20. $y = \ln \operatorname{sen} x$
21. $y = \ln \cos 5x$
22. $y = \ln(x^2 - 4)$
23. $y = \ln\sqrt{3x+4}$
24. $y = \ln\left(\dfrac{2x-3}{2x+3}\right)$
25. $y = \ln\sqrt[3]{x^3 + 8}$
26. $y = \ln^2(\sqrt{x})$
27. $y = \ln[(6x + 4)(3x^2 + 2)]$
28. $y = \log_3\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$
29. $y = \log\,(5bx^3 - 3\sqrt{x})$
30. $y = x - \ln(e^x \cos x)$
31. $y = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$
32. $y = x \ln x$
33. $y = \ln(\sec^2 2x \cdot \cos^3 2x)$
34. $y = \sqrt{\ln x}$
35. $y = \ln(\sec x + \tan x)$
36. $y = \ln\sqrt{1 - \operatorname{sen} 2x}$
37. $y = \ln(x \operatorname{sen} x)$
38. $y = x^3 \ln x^2$
39. $y = \ln\left(\tan\sqrt{x}\right)^3$
40. $y = \log\sqrt{x}$
41. $y = 2^{x^2 + 5x}$
42. $f(x) = b^{\sqrt{x}}$
43. $y = 3^{\ln x}$
44. $y = 5^{x \operatorname{sen} x}$
45. $y = x \cdot 2^{\ln x}$
46. $y = x \cdot 5^x$
47. $y = e^{x^2}$
48. $y = e^{3x^2 - 2x + 1}$

49. $y = e^{\sqrt{3x^2-1}}$
50. $y = e^{x \tan x}$
51. $y = \dfrac{b}{2}\left(e^{\frac{2x}{b}} - e^{-\frac{2x}{b}}\right)$
52. $y = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$
53. $f(x) = e^{4x}$
54. $f(x) = e^{5x^2}$
55. $f(x) = e^{3x-1}$
56. $f(x) = e^{\frac{x}{5}}$
57. $f(t) = \sqrt[3]{e^t}$
58. $f(x) = \sqrt[4]{e^x}$
59. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$
60. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
61. $f(\theta) = e^{\operatorname{sen}^2\theta}$
62. $f(x) = e^{\cos 2x}$
63. $y = e^{x \operatorname{sen} x}$
64. $f(x) = 5^{3x}$
65. $f(x) = 7^{2x}$
66. $f(x) = 5^{x^2}$
67. $y = x^{2x}$
68. $y = x^{\cos x}$
69. $y = \sqrt[x]{x}$
70. $y = e^{\arctan x}$
71. $y = \ln\left(\sqrt{xe^{2x}}\right)$
72. $y = xe^{\ln x^2}$
73. $y = \dfrac{e^x}{x+1}$
74. $y = \dfrac{xe^x}{\ln x^2}$
75. $y = \sqrt{\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}}$
76. $y = \sqrt{\dfrac{e^{\operatorname{sen} x}+1}{e^{\operatorname{sen} x}-1}}$
77. $y = \ln(\ln \operatorname{sen}^2 ax)$
78. $y = e^{\ln\sqrt{e^x \operatorname{sen} x}}$
79. $y = x^2 e^{\operatorname{sen} x}$
80. $y = \dfrac{\ln \operatorname{sen}^x x}{x}$
81. $y = \ln\left(3ax^2\sqrt{x^2-4}\right)$
82. $y = \sqrt{x^2+9} + 3\ln\left(x + \sqrt{x^2+9}\right)$
83. $y = \dfrac{1}{4}\sec 2x \tan 2x + \dfrac{1}{4}\ln(\sec 2x + \tan 2x)$
84. $y = x \operatorname{arc\,tan} x - \ln\sqrt{1+x^2}$
85. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left(x + \sqrt{x^2-4}\right)$
86. $y = x \operatorname{arc\,sec} x - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
87. $y = \dfrac{1}{12}\ln\left(\dfrac{2x-3}{2x+3}\right)$
88. $y = x \operatorname{arc\,cot} x + \ln\sqrt{1+x^2}$
89. $y = x \operatorname{arc\,csc}\dfrac{x}{2} + 2\ln\left(x + \sqrt{x^2-4}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de funciones implícitas

Una función implícita es una relación que se expresa en términos de x y y, por ejemplo:

$$3x^3 - y + 5x = x^2; \qquad \operatorname{sen} x = \cos(x - y); \qquad e^{x+y} = x; \qquad \ln(x + y) = \sqrt{x - y}$$

En una función implícita se derivan término a término los elementos de la igualdad respecto a la variable que se indica y al final se despeja la derivada.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita $3x^2 - 6xy + y^2 = 2x - y$?

Solución

Se derivan ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 6xy + y^2) = \frac{d}{dx}(2x - y)$$

$$\frac{d3x^2}{dx} - \frac{d6xy}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = \frac{d2x}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dx^2}{dx} - 6\frac{dxy}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = 2\frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

$$3(2x) - 6\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 2(1) - \frac{dy}{dx}$$

$$6x - 6x\frac{dy}{dx} - 6y + 2y\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx}$$

Se agrupan los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$, y se despeja:

$$-6x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2 + 6y - 6x$$

$$\frac{dy}{dx}(-6x + 2y + 1) = 2 + 6y - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 6x + 6y}{1 - 6x + 2y}$$

Por lo regular, el resultado de la derivada de una función implícita se expresa en términos tanto de x como de y.

Es común que en algunos casos la expresión $\frac{dy}{dx}$ se represente como y'.

2 Determina la derivada y' de la función $\sqrt{x+y} = x - y$

Solución

Al derivar ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x+y} = \frac{d}{dx}(x-y) \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{d}{dx}(x+y)}{2\sqrt{x+y}} = \frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{dx}{dx}+\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{x+y}} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

Se despeja y' de la igualdad $\frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}} = 1 - y'$, y el resultado es:

$$1 + y' = 2\sqrt{x+y} - 2y'\sqrt{x+y} \quad \rightarrow \quad y' + 2y'\sqrt{x+y} = 2\sqrt{x+y} - 1$$

$$y'\left(1+2\sqrt{x+y}\right) = 2\sqrt{x+y} - 1$$

$$y' = \frac{2\sqrt{x+y}-1}{1+2\sqrt{x+y}}$$

3 Obtén la derivada y' de la función $y = e^{x+y}$

Solución

Se derivan ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{x+y} \quad \rightarrow \quad y' = e^{x+y}\cdot\frac{d}{dx}(x+y) \quad \rightarrow \quad y' = e^{x+y}(1+y')$$

Se despeja y' de la igualdad:

$$y' = e^{x+y} + y'e^{x+y} \quad \rightarrow \quad y' - y'e^{x+y} = e^{x+y} \quad \rightarrow \quad y'(1 - e^{x+y}) = e^{x+y}$$

Donde:

$$y' = \frac{e^{x+y}}{1-e^{x+y}} \quad \text{o} \quad y' = \frac{y}{1-y}$$

4 Encuentra la derivada y' de la función implícita $\text{sen}(x + y) = x$

Solución

$$\frac{d}{dx}\text{sen}(x+y) = \frac{dx}{dx} \quad \rightarrow \quad \cos(x+y)(1+y') = 1 \quad \rightarrow \quad \cos(x+y) + y'\cos(x+y) = 1$$

$$y'\cos(x+y) = 1 - \cos(x+y)$$

Donde, la derivada

$$y' = \frac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{1}{\cos(x+y)} - \frac{\cos(x+y)}{\cos(x+y)} = \sec(x+y) - 1$$

5 Obtén la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita $x - \ln y = \ln x$

Solución

$$\frac{d}{dx}(x - \ln y) = \frac{d}{dx}(\ln x) \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dx} - \frac{d \ln y}{dx} = \frac{d \ln x}{dx} \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x}$$

Se despeja la derivada de la igualdad:

$$-\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x} - 1 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1 - x}{x} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{xy - y}{x}$$

6 Determina la derivada respecto a x de la función $\cos(x + y) = \operatorname{sen}(x - y)$

Solución

$$\frac{d}{dx}\cos(x + y) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x - y)$$

$$-\operatorname{sen}(x + y)\frac{d}{dx}(x + y) = \cos(x - y)\frac{d}{dx}(x - y)$$

$$-\operatorname{sen}(x + y) \cdot (1 + y') = \cos(x - y) \cdot (1 - y')$$

$$-\operatorname{sen}(x + y) - y'\operatorname{sen}(x + y) = \cos(x - y) - y'\cos(x - y)$$

Se despeja la derivada:

$$y'\cos(x - y) - y'\operatorname{sen}(x + y) = \cos(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)$$

$$y'[\cos(x - y) - \operatorname{sen}(x + y)] = \cos(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)$$

$$y' = \frac{\cos(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)}{\cos(x - y) - \operatorname{sen}(x + y)}$$

7 Encuentra la derivada de la siguiente función implícita $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2a$

Solución

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \frac{d}{dx}(2a) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

EJERCICIO 34

Deriva las siguientes funciones implícitas respecto a x:

1. $x^2 + y^2 = 4$
2. $2xy = 1$
3. $y^2 - 8x = 0$
4. $x^2 + 2y^2 + 5x - 2y - 1 = 0$
5. $3x^2 + 2xy - 6y^2 = 1$
6. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$
7. $\frac{x + y}{x - y} = x$
8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

9. $\sqrt[3]{xy}=2$
10. $y^3-2xy^2=x^3y+5x^2y^2-y$
11. $3x^3-2x^2y+5xy=y-3x$
12. $y\sqrt{x+y}=x$
13. $\sqrt{x+y}=xy$
14. $x=\dfrac{2x-3y}{2x+3y}$
15. $\sqrt{x}-\sqrt{y}=2x$
16. $y=\ln\sqrt{x\,y}$
17. $x^2y^2=e^{\ln(xy)}$
18. $\ln(\operatorname{sen}(e^y))=x$
19. $\dfrac{e^y}{e^x+1}=3$
20. $\ln\dfrac{y}{x^2+1}=1$
21. $x+y=\ln(x-y)$
22. $\dfrac{e^{x^2}+e^{y^2}}{x^2+y^2}=1$
23. $3^{x^2+2y}=1$
24. $x^y=2$
25. $y=\operatorname{arc\,tan}\dfrac{x}{y}$
26. $y\ \ln\ x-x\ \ln\ y-2=0$
27. $y^2=\ln(\ln x)^y$
28. $\ln(1+e^y)=e^x$
29. $\ln x^{\ln y}-x=0$
30. $xe^y-y=0$
31. $e^{\ln y}-xy=2$
32. $\operatorname{sen}(e^{x+y})-e^{x+y}=x$
33. $e^{x\cos y}=3x$
34. $\operatorname{sen}(x+a)-\cos(y-b)=ab$
35. $y-\cos x=\operatorname{sen} y$
36. $\operatorname{sen}^2(4x)+\cos^2(4y)=8$
37. $e^{\cos x}-e^{\operatorname{sen} y}=\operatorname{sen} y$
38. $\operatorname{sen}(xy)-2x=3$
39. $\operatorname{sen} x-\cos y-3=0$
40. $e^{\cos y}=\cos x$
41. $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} y}=x$
42. $x\operatorname{arc\,tan} y-y=0$
43. $y=\ln[\operatorname{sen}(x+y)]$
44. $2^y-x-3=0$
45. $e^{\operatorname{sen} y}+xy-2y=0$
46. $x^y-y^x=0$
47. $2+\operatorname{sen}(x+y)=y+\cos(x+y)$
48. $\dfrac{y}{\tan xy}-x=2$
49. $y\operatorname{arc\,cot} x-x-2=0$
50. $y\operatorname{arc\,cos}(e^x)=\cos y$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de orden superior

Las derivadas de orden superior se obtienen al derivar una función $y = f(x)$, tantas veces como lo indique el orden requerido.

La derivada de una función se llama primera derivada y se denota con $y' = \frac{dy}{dx}$

La derivada de la derivada se llama segunda derivada y se denota con $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

El proceso de hallar derivadas, una tras otra, se llama derivadas sucesivas.

La enésima derivada de una función se denota con $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ de la función $y = \cos^3 x$

Solución

Se obtiene la primera derivada de la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos^3 x}{dx} = -3\cos^2 x \operatorname{sen} x$$

Finalmente, se deriva el resultado anterior para obtener la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-3\cos^2 x \operatorname{sen} x) = -3\cos^3 x + 6\operatorname{sen}^2 x \cos x$$

2 Determina $\frac{d^3y}{dx^3}$ de la función $y = \ln x$

Solución

Se obtiene la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Se encuentran la segunda y tercera derivadas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}$$

Finalmente, el resultado es: $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$

3 Encuentra $\frac{d^4y}{dx^4}$ de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$

Solución

Se deriva sucesivamente la función, hasta llegar a la cuarta derivada:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x \qquad f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 \qquad f''(x) = 6x + 4$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^4(x) = 0$$

4 ¿Cuál es el resultado de $\frac{d^2y}{dx^2}$ de $x^2 - 3xy + y = 1$?

Solución

Se obtiene la primera derivada implícita: $\frac{d}{dx}(x^2 - 3xy + y) = \frac{d}{dx}(1) \rightarrow 2x - 3\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + \frac{dy}{dx} = 0$

$$2x - 3x\frac{dy}{dx} - 3y + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(1 - 3x) = 3y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{1 - 3x}$$

La segunda derivada es: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3y - 2x}{1 - 3x}\right) \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-3x)\left(3\frac{dy}{dx} - 2\right) - (3y - 2x)(-3)}{(1-3x)^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-3x)\left[3\left(\frac{3y-2x}{1-3x}\right) - 2\right] - (3y - 2x)(-3)}{(1-3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(3y-2x) - 2(1-3x) - (3y-2x)(-3)}{(1-3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9y - 6x - 2 + 6x + 9y - 6x}{(1-3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{18y - 6x - 2}{(1-3x)^2}$$

5 Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$ de $x^2 - xy + y^2 = 2$

Solución

Se obtiene la primera derivada:

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(2) \rightarrow 2x - \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow$$

$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx}(2y - x) = y - 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

Se obtiene la segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y-2x}{2y-x}\right) \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y-x)\left(\frac{dy}{dx} - 2\right) - (y-2x)\left(2\frac{dy}{dx} - 1\right)}{(2y-x)^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y-x)\left(\frac{-3y}{2y-x}\right) - (y-2x)\left(\frac{-3x}{2y-x}\right)}{(2y-x)^2}$$

al simplificar se obtiene: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(2y-x)^3}$

pero $x^2 - xy + y^2 = 2$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6(2)}{(2y-x)^3} = -\frac{12}{(2y-x)^3}$

EJERCICIO 35

Realiza lo que se te indica:

1. Determina $\frac{d^4y}{dx^4}$, si $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 5x + 2$
2. Obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $y = 4x^2 - 6x + 2$
3. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \frac{4x-1}{5x+3}$
4. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \frac{ax+b}{ax-b}$
5. Obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $y = (ax + b)^4$
6. Determina $\frac{d^4y}{dx^4}$, si $y = \text{sen } x + \cos x$
7. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \ln(\text{sen } x)$
8. Obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $y = \frac{3}{(x-1)^2}$
9. Encuentra $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \tan e^x$
10. ¿Cuál es la $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x - 3xy + 2y = 0$?
11. Obtén $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \sqrt{9-x^2}$
12. Determina $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x^2 + y^2 = 16$
13. Obtén $\frac{d^4y}{dx^4}$, si $y = x \ln x$
14. Calcula la $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $\text{sen } x + \cos y = 0$
15. Si $y = x^2 \text{ sen } x$, obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$
16. Si $y = \frac{x-1}{x+1}$, obtén $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^ny}{dx^n}$
17. Encuentra y'' de $xy + y - 1 = 0$
18. Si $y = \ln(\cos x)$, determina $\frac{d^3y}{dx^3}$
19. Si $f(x) = \frac{1}{1+\text{sen } x}$, obtén $\frac{d^2y}{dx^2}$
20. Determina y'' y y''' de $x^2 + xy + y^2 = 2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivadas de ecuaciones polares

Sea $\rho = f(\theta)$ una función en coordenadas polares. La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P(r, \theta)$ es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\rho' \operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

EJEMPLOS

1 Determina $\frac{dy}{dx}$, para la ecuación polar $\rho = 4\cos 3\theta$

Solución

Por el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\frac{d(4\cos 3\theta)}{d\theta}\right]\operatorname{sen}\theta + [4\cos 3\theta]\cos\theta}{\left[\frac{d(4\cos 3\theta)}{d\theta}\right]\cos\theta - [4\cos 3\theta]\operatorname{sen}\theta} = \frac{-12\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos 3\theta\cos\theta}{-12\operatorname{sen}3\theta\cos\theta - 4\cos 3\theta\operatorname{sen}\theta} = \frac{3\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}\theta - \cos 3\theta\cos\theta}{3\operatorname{sen}3\theta\cos\theta + \cos 3\theta\operatorname{sen}\theta}$$

2 Encuentra la pendiente de la recta tangente a la curva $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$

Solución

Al utilizar el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\frac{d}{d\theta}(1+\operatorname{sen}\theta)\right]\operatorname{sen}\theta + (1+\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\left[\frac{d}{d\theta}(1+\operatorname{sen}\theta)\right]\cos\theta - (1+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}2\theta + \cos\theta}{\cos 2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

Se evalúa ρ' en $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$m = \frac{\operatorname{sen}2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{0 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2} - 1$$

EJERCICIO 36

Determina la derivada de las siguientes ecuaciones polares:

1. $\rho = 2 \text{ sen } \theta + 3 \cos \theta$
2. $\rho = 4 \csc \theta$
3. $\rho = a \text{ sen } 5\theta$
4. $\rho = \sqrt{\text{sen } 2\theta}$
5. $\rho = 1 + \cos \theta$
6. $\rho = \dfrac{a}{1 - \cos \theta}$
7. $\rho = e^{a\theta}$
8. $\rho = 4 \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$
9. $\rho = 3 - 2 \cos \theta$
10. $\rho = 4\sqrt{\theta}$

En las siguientes ecuaciones polares, encuentra la pendiente en el punto indicado:

11. $\rho = 2 \cos \theta, \theta = \dfrac{\pi}{8}$
12. $\rho = \text{sen } \theta - \cos \theta, \theta = \dfrac{\pi}{3}$
13. $\rho = \tan \theta, \theta = \dfrac{\pi}{4}$
14. $\rho = \dfrac{2}{a - \text{sen } \theta}, \theta = \pi$
15. $\rho = 2\sqrt{\cos \frac{\theta}{2}}, \theta = -\dfrac{\pi}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Derivada de ecuaciones paramétricas

La curva $y = f(x)$ se define por las ecuaciones paramétricas $x = h(t)$ y $y = g(t)$; entonces, la pendiente de la recta tangente en un punto $P(x, y)$ es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}g(t)}{\frac{d}{dt}h(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ con } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula $\dfrac{dy}{dx}$ para la función cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2 + 3t, y = \dfrac{1}{t+1}$

Solución

Se determinan las derivadas respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 3; \ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{(t+1)^2}$$

Por el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{(t+1)^2}}{2t+3} = -\frac{1}{(2t+3)(t+1)^2}$$

2 Determina la pendiente de la recta tangente en el punto (x, y) a la curva, si sus ecuaciones paramétricas son $x = t - 2$, $y = \frac{1}{8}t^2 + 1$ en el intervalo $-3 \leq t \leq 3$, para el punto correspondiente a $t = 2$

Solución

Para aplicar el teorema se obtienen las derivadas: $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8}(t^2)+1\right] = \frac{1}{8}(2t) = \frac{2t}{8} = \frac{t}{4} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t-2) = 1$$

Al sustituir los resultados, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{t}{4}}{1} = \frac{t}{4}$$

Se evalúa la derivada en $t = 2$, para obtener el valor de la pendiente:

$$m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 37

Deriva las siguientes funciones paramétricas:

1. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$, $\quad t \in R$

2. $\begin{cases} x = 3t^3 - 5 \\ y = \dfrac{t+2}{4} \end{cases}$, $\quad 1 \leq t \leq 3$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - t} \\ y = t \end{cases}$, $\quad t \in R$

4. $\begin{cases} x = b \sec \theta \\ y = a \tan \theta \end{cases}$, $\quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

5. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = t\sqrt{t-1} \end{cases}$, $\quad t \in R$

6. $\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} \theta - \cos \theta \\ y = \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta \end{cases}$, $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$

7. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t^2 + 1}{t + 1} \end{cases}$, $\quad t \in R$

8. $\begin{cases} x = \cos\dfrac{\theta}{2} \\ y = \text{sen } 2\theta \end{cases}$, $\quad -\dfrac{\pi}{2} \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$

9. $\begin{cases} x = 5t^2 \\ y = \dfrac{4}{t^2} \end{cases}$, $\quad -3 < t < 3$

10. $\begin{cases} x = 3 + 2\tan\theta \\ y = 4 + \csc\theta \end{cases}$, $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

En las siguientes ecuaciones paramétricas obtén el valor de la pendiente en el punto indicado:

11. $\begin{cases} x = 1 + \text{sen } t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi,$ $\quad t = \dfrac{\pi}{3}$

12. $\begin{cases} x = mt^2 + b \\ y = nt + a \end{cases}$ $\quad m \le t \le n,$ $\quad t = 2mn$

13. $\begin{cases} x = b(2 - 3t) \\ y = at^2 \end{cases}$ $\quad 3a < t < 2b,$ $\quad t = \dfrac{b}{2a}$

14. $\begin{cases} x = 3t - \cos t \\ y = \text{sen } t \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le \pi,$ $\quad t = \pi$

15. $\begin{cases} x = 2\cot^2\theta \\ y = 4\cot\theta \end{cases}$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi,$ $\quad \theta = \dfrac{\pi}{4}$

16. $\begin{cases} x = 5t^2 \\ y = t - t^2 \end{cases}$ $\quad -3 < t < 3,$ $\quad t = 1$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 5

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Reseña HISTÓRICA

L'Hôpital escribió el primer libro de cálculo en 1696, en el cual eran obvias las influencias de sus profesores Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli y Leibniz.

L'Hôpital sirvió como oficial de caballería, pero tuvo que retirarse a causa de ser corto de vista. Desde ese tiempo dirigió su atención hacia las matemáticas. L'Hôpital aprendió cálculo de su maestro Johann Bernoulli en 1691.

L'Hôpital era un excelente matemático, en 1692 su fama está basada en su libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*.

En este libro publicó la regla que ahora se conoce como regla de L'Hôpital, para encontrar el límite de una función racional cuyo numerador y denominador tienden a cero.

Guillaume François Antoine marqués de L`Hôpital
(1661-1704)

Rectas tangente y normal a una curva

Analicemos primero algunas definiciones:

Tangente

Recta que toca a una curva en un punto.

Normal

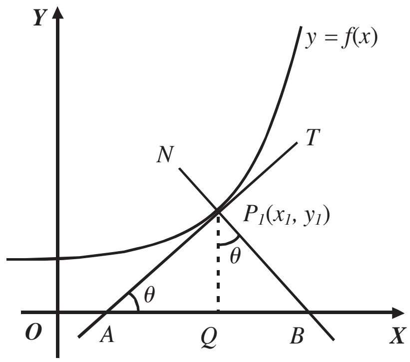
Recta perpendicular a la recta tangente en el punto de tangencia.
T: recta tangente
N: recta normal

$\overline{AP_1}$: longitud de la tangente

$\overline{P_1B}$: longitud de la normal

$\overline{AQ}$: longitud de la subtangente

$\overline{QB}$: longitud de la subnormal



- ***Longitud de la subtangente***. En el triángulo AQP_1 la $\tan\theta = \dfrac{\overline{P_1Q}}{\overline{AQ}}$, pero $\overline{P_1Q} = y_1$ y $\tan\theta = m = \dfrac{dy}{dx}$, al despejar $\overline{AQ}$ se obtiene, $\overline{AQ} = \dfrac{\overline{P_1Q}}{\tan\theta}$, por consiguiente:

$$\overline{AQ} = \frac{y_1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

- ***Longitud de la subnormal***. En el triángulo BQP_1 la $\tan\theta = \dfrac{\overline{QB}}{\overline{QP_1}}$, pero $\overline{QP_1} = y_1$ y $\tan\theta = m = \dfrac{dy}{dx}$, por tanto, al despejar $\overline{QB}$ se obtiene, $\overline{QB} = \overline{QP_1} \cdot \tan\theta$, por consiguiente:

$$\overline{QB} = y_1\frac{dy}{dx}$$

- ***Longitud de la tangente***. Es la distancia que existe entre el punto de tangencia y la intersección de la recta tangente con el eje X.
  En el triángulo AQP_1 por el teorema de Pitágoras:

$$(\overline{AP_1})^2 = (\overline{AQ})^2 + (\overline{QP_1})^2$$

Pero, $\overline{AQ} = \dfrac{y_1}{\frac{dy}{dx}}$ y $\overline{QP_1} = y_1$, por consiguiente:

$$\overline{AP_1}^2 = \left(\frac{y_1}{\frac{dy}{dx}}\right)^2 + (y_1)^2 = \frac{(y_1)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + (y_1)^2 = \frac{(y_1)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

Al despejar $\overline{AP_1}$ se obtiene, $\overline{AP_1} = \dfrac{y_1}{\frac{dy}{dx}}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, por tanto,

$$\overline{AP_1} = \frac{y_1}{y'}\sqrt{1+y'^2}$$

- ***Longitud de la normal***. Es la distancia que existe entre el punto de tangencia y la intersección de la recta normal con el eje X.
  En el triángulo BQP_1 por el teorema de Pitágoras:

$$(\overline{BP_1})^2 = (\overline{BQ})^2 + (\overline{QP_1})^2$$

Pero $\overline{BQ} = y_1 \cdot \dfrac{dy}{dx}$ y $\overline{QP_1} = y_1$

$$(\overline{BP_1})^2 = \left(y_1 \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2 + (y_1)^2 = (y_1)^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

Al despejar $\overline{BP_1}$, se obtiene, $\overline{BP_1} = y_1\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, por consiguiente:

$$\overline{BP_1} = y_1\sqrt{1+y'^2}$$

Ecuación de la recta tangente

La ecuación de la recta tangente a una curva en el punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente $m = \dfrac{dy}{dx}$ está dada por:

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$$

Ecuación de la recta normal

La ecuación de la recta normal a una curva en el punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente $m = -\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ está determinada por:

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2 + xy + y = x - 4$ en el punto $(1, -2)$?

Solución

Se derivan ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{d(x^2+xy+y)}{dx}=\frac{d(x-4)}{dx} \quad\rightarrow\quad 2x+\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+\frac{dy}{dx}=1 \quad\rightarrow\quad 2x+x\frac{dy}{dx}+y+\frac{dy}{dx}=1$$

Se despeja $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x-y}{1+x}\text{, por definición } m_T=\frac{1-2x-y}{1+x}$$

Al sustituir las coordenadas del punto de tangencia en la pendiente, se obtiene:

$$m=\frac{1-2(1)-(-2)}{1+1}=\frac{1}{2}$$

2 Determina la pendiente de la recta tangente a la curva $\delta = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, en el punto $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$

Solución

Al derivar la ecuación de la curva:

$$\frac{d\delta}{d\theta}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{d\theta}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(-1)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

se obtiene que: $m_T=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

Se sustituye el punto en la pendiente:

$$m=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3 Encuentra la longitud de la subtangente, la subnormal, la tangente y la normal a la curva $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ en el punto $P(1, 1)$.

Solución

Se deriva la función y se evalúa en el punto para encontrar la pendiente de la recta tangente en ese punto.

$$f'(x) = -2x + 6$$

Si $x = 1$, entonces,

$$f'(1) = -2(1) + 6 = -2 + 6 = 4$$

Por tanto,

$$\text{subtangente: } \frac{y_1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{4} \qquad \text{subnormal: } y_1\frac{dy}{dx} = (1)(4) = 4$$

$$\text{tangente: } \frac{y_1}{\frac{dy}{dx}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{17} \qquad \text{normal: } y_1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{17}$$

4 Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva $xy + y - 1 = 0$ en el punto $\left(3, \frac{1}{4}\right)$

Solución

Al derivar la función se obtiene $y' = -\frac{y}{x+1}$, por definición $m_T = -\frac{y}{x+1}$

Se evalúa en el punto $\left(3, \frac{1}{4}\right)$, $m_T = -\frac{\frac{1}{4}}{3+1} = -\frac{1}{16}$

Ecuación de la tangente:

Se obtiene con $P\left(3, \frac{1}{4}\right)$ y $m_T = -\frac{1}{16}$, se sustituye en $y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{16}(x-3) \quad \rightarrow \quad 16y - 4 = -x + 3 \quad \rightarrow \quad x + 16y - 7 = 0$$

Ecuación de la normal:

Se obtiene con $P\left(3, \frac{1}{4}\right)$ y $m_N = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 16$, se sustituye en $y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{4} = 16(x-3) \quad \rightarrow \quad 4y - 1 = 64x - 192 \quad \rightarrow \quad 64x - 4y - 191 = 0$$

Las ecuaciones de las rectas tangente y normal son: $x + 16y - 7 = 0$ y $64x - 4y - 191 = 0$

EJERCICIO 38

Calcula la longitud de la subtangente, la subnormal, la tangente y la normal de las curvas dadas en el punto indicado.

1. $f(x) = -x + 2$ en $x = 3$
2. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ en $x = -2$
3. $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto $(-1, 12)$
4. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ en el punto $(2, 7)$
5. $y = \frac{x+1}{x-1}$ en el punto $(2, 3)$
6. $f(x) = \sqrt{-x}$ en el punto $(-9, 3)$
7. $f(x) = \sqrt{x+3}$ en el punto $(1, 2)$
8. $y = \frac{1}{x}$ en $x = 2$

9. $f(x) = x^2 - 4x$ en $x = 3$

10. $x^2y - y - 2 = 0$ en el punto $\left(2, \dfrac{2}{3}\right)$

Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva en el punto indicado:

11. $y = x^2 + 5$ en el punto $(-2, 9)$

12. $y = x^2 - x + 1$ en el punto $(0, 1)$

13. $y = 4x^2 - 4x + 1$ en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

14. $y = x^3 - x^2$ en el punto $(2, 4)$

15. $y = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x - 9$ en el punto $(-1, -4)$

16. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en el punto $\left(\sqrt{5}, 2\right)$

17. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ en el punto $(3, 2)$

18. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ en el punto $(0, 2)$

19. $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

20. $y = \cos x$ en el punto $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$

21. $y = \tan x + 2$ en el punto $\left(\dfrac{\pi}{4}, 3\right)$

22. $x^2 - y^2 - 12 = 0$ en el punto $(4, 2)$

23. $xy = 1$ en el punto $(1, 1)$

24. $x^3 + 2xy - 4 = 0$ en el punto de abscisa $x = 1$

25. $x^2y^2 - 4y + 1 = 0$ en el punto de abscisa $x = 2$

26. $\sqrt{x+y} = x + 1$ en el punto de abscisa $x = 3$

27. $f(x) = \ln x$ en el punto de abscisa $x = e$

28. $xy + x - 2 = 0$ en el punto de abscisa $x = \dfrac{1}{2}$

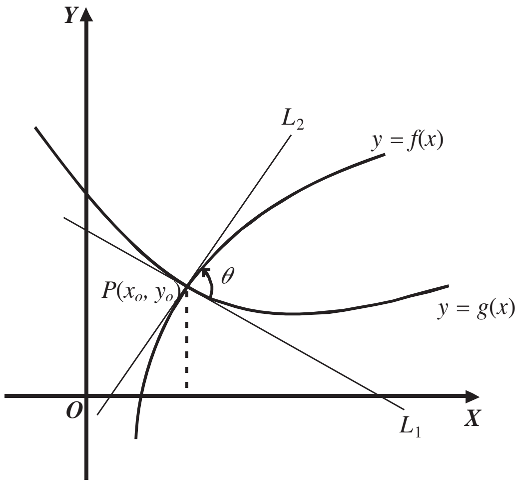
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ángulo entre dos curvas

Sea $P(x_o, y_o)$ el punto de intersección entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$, entonces el ángulo θ entre las curvas se obtiene con:

$$\tan\theta = \frac{f'(x_o) - g'(x_o)}{1 + f'(x_o)\cdot g'(x_o)}$$

Donde $f'(x_o)$ es la pendiente de la recta L_2 y $g'(x_o)$ es la pendiente de la recta L_1



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el ángulo agudo formado por las curvas $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x^2$ en el punto de intersección, cuya abscisa es $x = \sqrt{2}$

Solución

Se obtienen las derivadas de las funciones:

$$f(x) = 4 - x^2 \qquad g(x) = x^2$$

$$f'(x) = -2x \qquad g'(x) = 2x$$

Se evalúa la abscisa $x = \sqrt{2}$ en las pendientes (derivadas)

$$f'(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \qquad g'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

Se aplica la fórmula, entonces;

$$\tan\theta = \frac{f'\left(\sqrt{2}\right) - g'\left(\sqrt{2}\right)}{1 + f'\left(\sqrt{2}\right)g'\left(\sqrt{2}\right)} = \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{1 + \left(-2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}\right)} = -\frac{4\sqrt{2}}{1-8} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Al despejar θ

$$\theta = \arctan\left(\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$$

Por tanto:

$$\theta = 38° \, 56' \, 32''$$

2 ¿Cuál es la medida de los ángulos formados por las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 - y^2 + 6x + 8 = 0$ en los puntos $\left(-1, \sqrt{3}\right)$, $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$?

Solución

Paso I:
Se obtienen las pendientes de las curvas al derivar las ecuaciones y evaluar los puntos dados:

De la curva $x^2 + y^2 = 4$, $y' = -\dfrac{x}{y}$ y de la curva $x^2 - y^2 + 6x + 8 = 0$, $y' = \dfrac{x+3}{y}$

En el punto $\left(-1, \sqrt{3}\right)$, las pendientes son: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ respectivamente.

En el punto $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$, las pendientes son: $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ respectivamente.

Paso II:
Se obtiene el ángulo al sustituir el valor de las pendientes en la fórmula.

Para el punto $\left(-1, \sqrt{3}\right)$:

$$\tan\theta = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5\sqrt{3}}$$

Por consiguiente: $\theta = 19° \, 6'$

Para el punto $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$

$$\tan\theta = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5\sqrt{3}}$$

Finalmente: $\theta = 160° \, 54'$

3 Encuentra la medida del ángulo agudo formado por las curvas $x^2 + y^2 - 8 = 0$ y $y^2 - 2x = 0$

Solución

Se obtienen las intersecciones de las curvas mediante un sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 8 = 0;\ y^2 = 2x \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x = -4,\ x = 2$$

Luego, si $x = 2$ entonces $y = \pm 2$ que resultan en los puntos $(2, 2)$ y $(2, -2)$
Se obtienen las derivadas de cada una de las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 8 = 0 \qquad\qquad y^2 - 2x = 0$$

$$2x + 2yy' = 0 \qquad\qquad 2yy' - 2 = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y} \qquad\qquad y' = \frac{1}{y}$$

Se realiza la evaluación en los puntos (2, 2) y (2, −2)

Para el punto (2, 2) $\rightarrow$ $y_1' = -\dfrac{2}{2} = -1;\ y_2' = \dfrac{1}{2}$

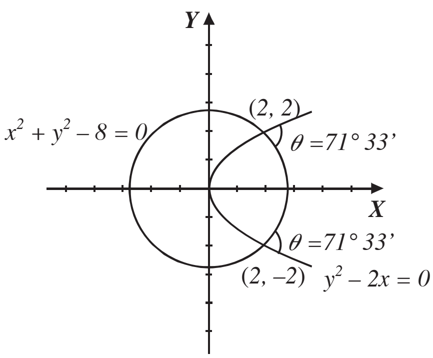
Luego:

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}-(-1)}{1+\frac{1}{2}(-1)} = \frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3;\ \text{donde } \theta = \text{arc}\tan(3) = 71°\ 33'$$

Para el punto (2, −2) $\rightarrow$ $y_2' = -\dfrac{2}{-2} = 1;\ y_1' = -\dfrac{1}{2}$

Luego,

$$\tan\theta = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+(1)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3;\ \text{donde } \theta = \text{arc}\tan(3) = 71°\ 33'$$



EJERCICIO 39

Determina la medida del ángulo agudo y obtuso que forman las curvas dadas en el punto indicado:

1. $y = x^2 + 1$; $y = \sqrt{x+1}$ en el punto $(0, 1)$
2. $y = \dfrac{4}{9}x^2$; $y = \sqrt{25 - x^2}$ en el punto $(3, 4)$
3. $y = \sqrt{13 - x^2}$; $y = \sqrt{18 - (x+5)^2}$ en el punto $(-2, 3)$
4. $x^2 - y^2 - 2 = 0$; $y^2 - x = 0$ en el punto $\left(2, \sqrt{2}\right)$
5. $3x^2 + 5y = 0$; $2x + 5y + 1 = 0$ en el punto $\left(1, -\dfrac{3}{5}\right)$
6. $xy = 1$; $y = \dfrac{x-1}{x}$ en el punto $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$
7. $x^2 + y^2 - 5 = 0$; $y^2 - 4x = 0$ en el punto de abscisa 1
8. Determina la medida del ángulo obtuso que forma $x^2 + 3y^2 - 13 = 0$ y $y^2 - 4x = 0$

Calcula la medida del ángulo agudo que forman las curvas dadas:

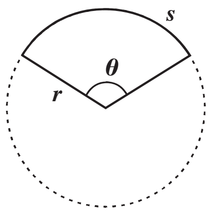
9. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$; $4y^2 - 9x = 0$
10. $xy - x - 2 = 0$; $xy - 1 = 0$
11. $x = \sqrt{2y}$; $y = 2(x+2)^2$
12. $y = x^2 + x$; $y = -x^2 + 5x$
13. $y^2 = x + 1$; $y^2 + 2x - 4 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Curvatura

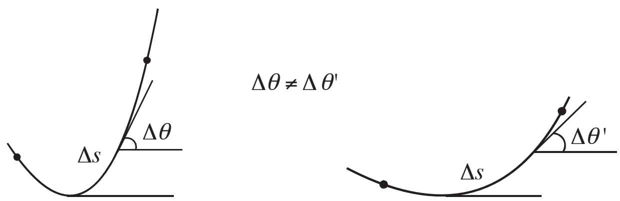
Radio de curvatura

En geometría plana la longitud de un segmento circular está dada por la fórmula: $s = r \cdot \theta \quad \rightarrow \quad r = \dfrac{s}{\theta}$



En la figura se observa que s cambia cuando θ cambia.

En una curva cualquiera, al tomar un segmento muy pequeño formado por dos puntos de la curva y al relacionar la fórmula anterior se tiene que:

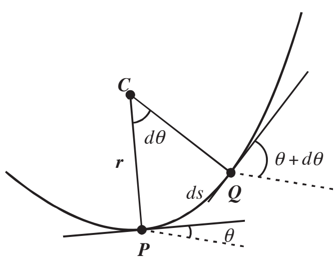


De la fórmula anterior se define Δr como:

$$\Delta r = \frac{\Delta s}{\Delta \theta}$$

Luego, si la longitud Δs es cada vez más pequeña, es decir, tiende a cero, el *radio de curvatura* se define como el siguiente límite:

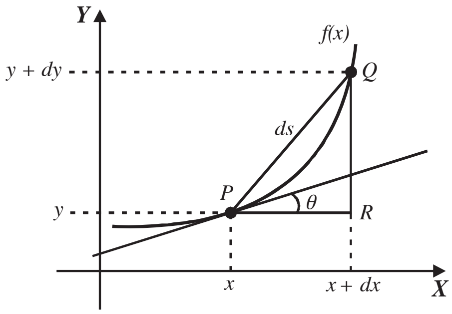
$$r = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta \theta} = \frac{ds}{d\theta} \quad \rightarrow \quad r = \frac{ds}{d\theta}$$



En la figura se tienen dos puntos, P y Q, de la curva, muy próximos entre sí, en cada punto se traza una recta tangente y su normal. Al punto de intersección entre las normales se le llama *centro de curvatura* y a la distancia del centro a cualquiera de los puntos P y Q se le llama *radio de curvatura*.

La expresión $\frac{1}{r}=\frac{d\theta}{ds}$ recibe el nombre de *curvatura*.

Para determinar la fórmula que permita calcular el radio de curvatura se tiene la siguiente figura.



En la función $f(x)$ se tienen los puntos P y Q infinitamente muy próximos, de manera que la longitud del segmento circular ds sea igual a la longitud del segmento PQ; entonces, de la representación geométrica de la derivada se tiene que:

$$\frac{dy}{dx}=\tan\theta \;\rightarrow\; \theta=\arctan\frac{dy}{dx}$$

Del triángulo PQR y el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{\left[1+\frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right](dx)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx$$

Luego,

$$ds=r\cdot d\theta \;\rightarrow\; r=\frac{ds}{d\theta}$$

$$r=\frac{ds}{d\theta}\;\rightarrow\; r=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx}{d\arctan\frac{dy}{dx}}\;\rightarrow\; r=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx}{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\;\rightarrow\; r=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

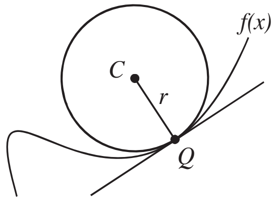
Finalmente, la fórmula para determinar el radio de curvatura es:

$$r=\frac{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}\quad \text{o}\quad r=\frac{\sqrt{\left[1+(y')^2\right]^3}}{|y''|}$$

La longitud del radio de curvatura es una cantidad positiva.

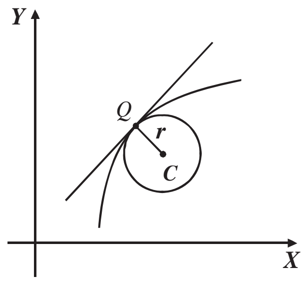
Círculo de curvatura

Es una curva dada en un punto de tangencia a la circunferencia, que tiene de centro el centro de curvatura y de radio el radio de curvatura y que pasa por un punto de tangencia, también se le conoce como circunferencia osculatriz o círculo osculador.



Centro de curvatura

Para determinar la fórmula que permita calcular el centro de curvatura se tiene la siguiente figura.



Donde:

$C(\alpha, \beta)$: centro de curvatura

$Q(x, y)$: punto de la curva

r: radio de curvatura

Se obtiene la ecuación de la recta normal de la recta tangente en el punto Q.

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x)$$

Se obtiene la ecuación de la circunferencia de centro el punto $C(\alpha, \beta)$, radio r y que pasa por el punto $Q(x, y)$.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se obtienen las coordenadas del centro de curvatura.

$$\alpha = x - \left(\frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right), \quad \beta = y + \left(\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right)$$

$$\alpha = x - \left(\frac{y'\left[1 + (y')^2\right]}{y''} \right), \quad \beta = y + \left(\frac{1 + (y')^2}{y''} \right)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el radio de curvatura y la curvatura de la curva $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3, 4)

Solución

Se obtienen la primera y la segunda derivadas de la función dada.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3}$$

El punto se evalúa en cada derivada.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{3}{4};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{3^2+4^2}{4^3} = -\frac{25}{64}$$

Los valores que se obtienen se sustituyen en la fórmula de radio de curvatura.

$$r = \frac{\sqrt{\left[1+(y')^2\right]^3}}{|y''|} \rightarrow r = \frac{\sqrt{\left[1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]^3}}{\left|-\frac{25}{64}\right|} \rightarrow r = \frac{\frac{125}{64}}{\frac{25}{64}} \rightarrow r = 5$$

Por tanto, el radio de curvatura es:

$$r = 5$$

Luego, el valor de la curvatura se obtiene con la expresión:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$$

Finalmente, el valor de la curvatura es:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{5}$$

2 Determina el radio y el centro de curvatura de curva $y^2 = -8x$, en el punto $(-2, 4)$

Solución

Se obtienen la primera y la segunda derivadas de la curva y se evalúa el punto.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{y} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{16}{y^3} = -\frac{16}{(4)^3} = -\frac{1}{4}$$

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula del radio de curvatura.

$$r = \frac{\sqrt{\left[1+(-1)^2\right]^3}}{\left|-\frac{1}{4}\right|} \rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{4}} \rightarrow r = 8\sqrt{2}$$

Por tanto, el radio de curvatura es:

$$r = 8\sqrt{2}$$

Luego, el punto $(-2, 4)$ y los valores de las derivadas, se sustituyen en las fórmulas que determinan las coordenadas del centro de curvatura.

$$\alpha = x - \left(\frac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''}\right) \rightarrow \alpha = -2 - \left(\frac{-1\left[1+(-1)^2\right]}{-\frac{1}{4}}\right) \rightarrow \alpha = -2-8 = -10$$

$$\beta = y + \left(\frac{1+(y')^2}{y''}\right) \rightarrow \beta = 4 + \left(\frac{1+(-1)^2}{-\frac{1}{4}}\right) \rightarrow \beta = 4-8 = -4$$

Por tanto, las coordenadas del centro de curvatura son el punto $(-10, -4)$

Radio de curvatura en coordenadas paramétricas

Dadas las ecuaciones de una curva en coordenadas paramétricas.

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

Entonces, al derivar y sustituir en la fórmula del radio de curvatura en coordenadas rectangulares, se obtiene:

$$r = \frac{\left[\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\right]^3}{\left|\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right|} \rightarrow r = \frac{\left[\sqrt{(x')^2+(y')^2}\right]^3}{\left|x'\cdot y'' - y'\cdot x''\right|}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

3 Determina el radio de curvatura de la elipse $x = 2\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t$ en el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{2}$

Solución

Se obtienen la primera y la segunda derivadas de cada ecuación y se evalúa $t = \frac{\pi}{2}$ en cada una de ellas.

$$x = 2\cos t \;\rightarrow\; x' = -2\,\text{sen}\,t \;\rightarrow\; x' = -2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(1) = 2$$

$$x'' = -2\cos t \;\rightarrow\; x'' = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(0) = 0$$

$$y = 3\,\text{sen}\,t \;\rightarrow\; y' = 3\cos t \;\rightarrow\; y' = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3(0) = 0$$

$$y'' = -3\,\text{sen}\,t \;\rightarrow\; y'' = -3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3(1) = -3$$

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula del radio de curvatura:

$$r = \frac{\left[\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right]^3}{|x'\cdot y'' - y'\cdot x''|} \;\rightarrow\; r = \frac{\left[\sqrt{(2)^2 + (0)^2}\right]^3}{|(2)(-3) - (0)(0)|} \;\rightarrow\; r = \frac{8}{|-6|} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Por consiguiente, el radio de curvatura de la elipse en el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{2}$ es:

$$r = \frac{4}{3}$$

Radio de curvatura en coordenadas polares

Dada la curva con ecuación de la forma:

$$\rho = f(\theta)$$

Se tiene que:

$$x = \rho\cos\theta\,,\;\; y = \rho\,\text{sen}\,\theta$$

Si se sustituye $\rho = f(\theta)$ en estas últimas ecuaciones, se obtiene:

$$x = f(\theta)\cos\theta\,,\;\; y = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$$

Entonces, al derivar y sustituir en la fórmula del radio de curvatura en coordenadas rectangulares, se obtiene:

$$r = \frac{\left[\sqrt{\rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\right]^3}{\left|\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho\cdot\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right|} \;\rightarrow\; r = \frac{\left[\sqrt{\rho + (\rho')^2}\right]^3}{|\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''|}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

4 Determina el radio de curvatura de la curva $\rho = \cos 2\theta$, en el punto correspondiente a $\theta = \pi$

Solución

Se determinan la primera y la segunda derivadas de la función dada y se evalúa $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\rho = \cos 2\theta \ \rightarrow \ \rho = \cos 2(\pi) \ \rightarrow \ \rho = 1$$

$$\rho' = -2 \text{ sen } 2\theta \ \rightarrow \ \rho' = -2 \text{ sen } 2(\pi) \ \rightarrow \ \rho' = 0$$

$$\rho'' = -4 \cos 2\pi \ \rightarrow \ \rho'' = -4 \cos 2(\pi) \ \rightarrow \ \rho'' = -4$$

Los valores se sustituyen en la fórmula y se simplifican las operaciones.

$$r = \frac{\left[\sqrt{1+(0)^2}\right]^3}{\left|(1)^2 + 2(0)^2 - (1)(-4)\right|} = \frac{\left[\sqrt{1}\right]^3}{|1+0+4|} = \frac{1}{|5|} = \frac{1}{5}$$

Por tanto, el valor del radio de curvatura es:

$$r = \frac{1}{5}$$

EJERCICIO **40**

Determina el radio de curvatura y la curvatura de las curvas en el punto dado:

1. $x^2 - y^2 = -3$ $\quad (1, 2)$
2. $xy + y + 4 = 0$ $\quad (3, -1)$
3. $x^2 + 4y = 0$ $\quad (2, -1)$
4. $y = x^3$ $\quad (1, 1)$
5. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen } t \end{cases}$ $\quad t = \pi$
6. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t^2 \end{cases}$ $\quad t = 2$
7. $\rho = \cos \theta$ $\quad \theta = \frac{\pi}{2}$
8. $\rho = \text{sen}\frac{\theta}{2}$ $\quad \theta = \frac{\pi}{3}$

Determina el centro de curvatura de las curvas en el punto dado:

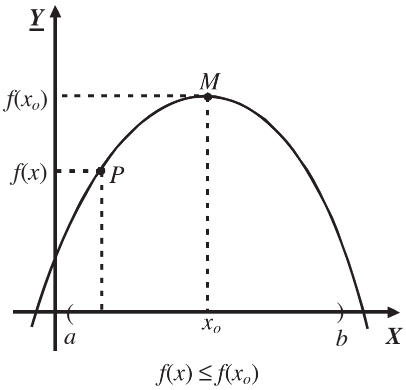
9. $x^2 - 4y = 0$ $\quad (2, 1)$
10. $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$ $\quad (-2, 1)$
11. $y = \text{sen } x$ $\quad \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
12. $y - e^x = 0$ $\quad (0, 1)$
13. $y = \sqrt{x+1}$ $\quad (3, 2)$

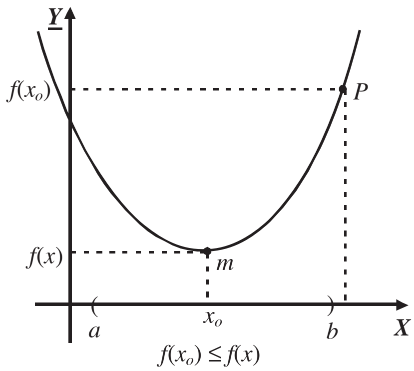
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Máximos y mínimos de una función

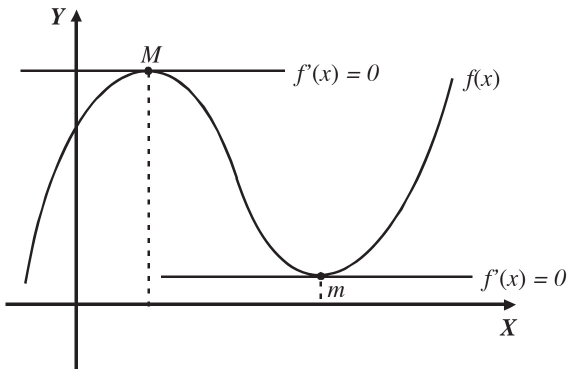
Definición

1. Se dice que una función $f(x)$ tiene un máximo local M en $x = x_o$, si $f(x_o) \geq f(x)$ para toda x en un intervalo (a, b) tal que x_o, pertenezca a dicho intervalo.
2. Se dice que una función $f(x)$ tiene un mínimo local m en $x = x_o$, si $f(x_o) \leq f(x)$ para toda x en un intervalo (a, b) tal que x_o, pertenezca a dicho intervalo.





Si $f(x)$ tiene un máximo o mínimo local en x_o, entonces la pendiente de la recta tangente (derivada) en dicho punto es igual a cero.



Donde:

M = punto máximo

m = punto mínimo

Criterio de la primera derivada para encontrar puntos máximos y mínimos

a) Si $f'(x) > 0$, para toda $x \in (a, x_o)$ y $f'(x) < 0$, para toda $x \in (x_o, b)$ (es decir, la derivada cambia de valores positivos a negativos), entonces en $f(x_o)$ existe un valor máximo local.

b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, x_o)$ y $f'(x) > 0$, para toda $x \in (x_o, b)$ (es decir, la derivada cambia de valores negativos a positivos), entonces en $f(x_o)$ existe un valor mínimo local.

c) Si para toda $x \in (a, b)$ y $f'(x)$ tiene el mismo signo, entonces $f(x)$ no tiene valor máximo ni mínimo local.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los puntos máximos y mínimos para la función $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$, utiliza el criterio de la primera derivada.

Solución

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = 6x - 12$$

Paso II
La derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$f'(x) = 6x - 12; \qquad 6x - 12 = 0 \qquad \text{donde} \qquad x = 2$$

Este resultado recibe el nombre de valor o punto crítico.

Paso III
Se da un valor menor y uno mayor próximo al valor crítico y se evalúan en la derivada.
Para $x = 2$ se toman los valores 1 y 3

$$f'(1) = 6(1) - 12 = -6 < 0 \qquad \text{y} \qquad f'(3) = 6(3) - 12 = 6 > 0$$

El cambio de signo es de negativo a positivo, entonces la función tiene un valor mínimo en $x = 2$.

Paso IV
El valor crítico se evalúa en la función:

$$f(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 15$$
$$f(2) = 3$$

Por consiguiente, el punto mínimo es (2, 3)

2 Obtén los puntos máximos y mínimos para la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$

Solución

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

Paso II
La derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 6x^2 - 6x - 12 &= 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-2)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Los valores críticos son:

$$x_1 = 2, x_2 = -1$$

Paso III
Se dan valores menores y mayores próximos a los valores críticos y se evalúan en la derivada.

Para $x = -1$, se toman los valores $x = -\frac{3}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$

$$f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{-3}{2}\right) - 12 = \frac{21}{2} > 0 \quad \text{y} \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{-1}{2}\right) - 12 = -\frac{15}{2} < 0$$

La derivada cambia de signo positivo a negativo, entonces la función tiene un valor máximo en $x = -1$

Para $x = 2$ se toman los valores $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{5}{2}$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{2}\right) - 12 = -\frac{15}{2} < 0 \quad \text{y} \quad f'\left(\frac{5}{2}\right) = 6\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{5}{2}\right) - 12 = \frac{21}{2} > 0$$

La derivada cambia de signo negativo a positivo, entonces la función tiene un valor mínimo en $x = 2$

Paso IV
Los valores críticos se evalúan en la función:

Para $x = -1$, $f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 15 = 22$

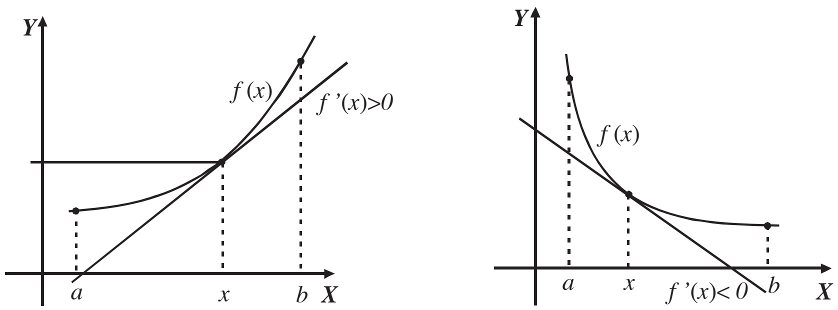
Para $x = 2$, $f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 15 = -5$

Por tanto, el punto máximo es $(-1, 22)$ y el punto mínimo es $(2, -5)$

Intervalos donde crece o decrece una función

Definición

1. Una función es creciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$
2. Una función es decreciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$



Observación 1. Existen funciones siempre crecientes, pero su derivada se anula para algún valor de x.

Ejemplo

La función $f(x) = 1 + (x - 2)^3$ es siempre creciente, pero su derivada es cero para $x = 2$

$$f'(x) = 3(x - 2)^2 \quad \rightarrow \quad f(2) = 3(2 - 2)^2 = 3(0) = 0$$

Observación 2. Existen funciones siempre decrecientes, pero su derivada se anula para algún valor de x.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La función $f(x) = 1 - (x - 2)^3$ es siempre decreciente, pero su derivada es cero para $x = 2$

$$f'(x) = -3(x - 2)^2 \quad \rightarrow \quad f(2) = -3(2 - 2)^2 = -3(0) = 0$$

2 Indica los intervalos donde la función $f(x)= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$ es creciente y decreciente.

Solución

a) Intervalo donde $f(x)$ es creciente.

Paso I
Se obtiene la derivada de la función: $f'(x) = x^2 - x - 6$

Paso II
Por definición $f'(x) > 0$

$$x^2 - x - 6 > 0$$

Al resolver la desigualdad se obtienen los intervalos:

$$(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

Donde la función es creciente.

b) Intervalo donde $f(x)$ es decreciente.

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = x^2 - x - 6$$

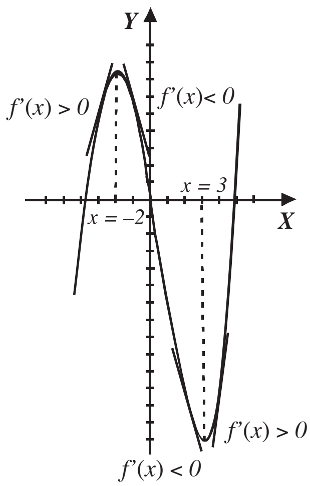
Paso II
Por definición $f'(x) < 0$

$$x^2 - x - 6 < 0$$

Al resolver la desigualdad se obtiene el intervalo:

$$(-2, 3)$$

Donde la función es decreciente.
Gráfica:



EJERCICIO 41

Encuentra los máximos, los mínimos y los intervalos para los que la función es creciente o decreciente.

1. $f(x)=x^2-6x+5$
2. $f(x)=-3x^2+5x-4$
3. $f(x)=x^3-3x$
4. $f(x)=x^3-6x^2$
5. $f(x)=4x^3+3x^2-6x$
6. $f(x)=4x^3-x^2-4x+3$
7. $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-5$
8. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+1$
9. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+4$
10. $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2+1$
11. $y=\dfrac{3}{x^2-2x}$
12. $f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$
13. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}$
14. $y=\dfrac{x^2-1}{4-x^2}$
15. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Criterio de la segunda derivada para encontrar puntos máximos y mínimos

a) Dada $y = f(x)$ con $f'(x_o) = 0$, si $f''(x_o) > 0$, entonces el punto $(x_o, f(x_o))$ representa un punto mínimo.
b) Dada $y = f(x)$ con $f'(x_o) = 0$, si $f''(x_o) < 0$, entonces el punto $(x_o, f(x_o))$ representa un punto máximo.

Ejemplo

Determina con el criterio de la segunda derivada los puntos máximos y mínimos de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 10$$

Solución

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$$

Paso II
Se iguala la derivada a cero y se resuelve la ecuación:

$$3x^2 - 6x - 24 = 0$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

Los valores críticos son:

$$x = 4 \quad \text{y} \quad x = -2$$

Paso III

Se obtiene la segunda derivada y se evalúa con los valores críticos:

$$f''(x) = 6x - 6$$

Para $x = -2$

$$f''(-2) = 6(-2) - 6 = -18 < 0$$

Por tanto, la función tiene un valor máximo en $x = -2$

Para $x = 4$

$$f''(4) = 6(4) - 6 = 18 > 0$$

Por tanto, la función tiene un valor mínimo en $x = 4$

Paso IV

Los valores críticos se evalúan en la función:

Para $x = -2$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 24(-2) - 10 = 18$$

Para $x = 4$

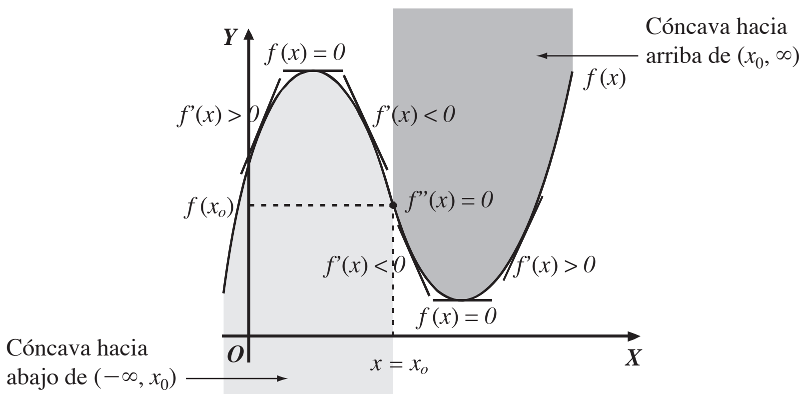
$$f(4) = (4)^3 - 3(4)^2 - 24(4) - 10 = -90$$

Entonces, la función tiene un punto máximo en $(-2, 18)$ y un punto mínimo en $(4, -90)$

Concavidad y punto de inflexión de una función

La función $f(x)$ es cóncava hacia arriba cuando las rectas tangentes a dicha función están por debajo de la curva.

La función $f(x)$ es cóncava hacia abajo cuando las rectas tangentes a dicha función están por arriba de la curva.



Donde $(x_o, f(x_o))$ es el punto de inflexión.

Prueba de concavidad:

1. Una función es cóncava hacia arriba en un intervalo (a, b) si para todo $x \in (a, b)$, $f''(x) > 0$
2. Una función es cóncava hacia abajo en un intervalo (a, b) si para todo $x \in (a, b)$, $f''(x) < 0$
3. Una función tiene un punto de inflexión en $(x_o, f(x_o))$ si $f''(x_o) = 0$

Ejemplo

Determina las coordenadas del punto de inflexión y los intervalos de concavidad para la función:

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 60x$$

Solución

Punto de inflexión

Paso I
Se obtiene la segunda derivada:

$$f'(x) = -6x^2 + 18x + 60 \quad \rightarrow \quad f''(x) = -12x + 18$$

Paso II
La segunda derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$-12x + 18 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Paso III
Se evalúa la función con $x = \frac{3}{2}$:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 60\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{207}{2}$$

Por consiguiente, las coordenadas del punto de inflexión son $\left(\frac{3}{2}, \frac{207}{2}\right)$

Intervalos de concavidad

Intervalo donde la función es cóncava hacia arriba.

Por definición $f''(x) > 0$, entonces:

$$-12x + 18 > 0$$

Al resolver la desigualdad se obtiene que $x < \frac{3}{2}$, por tanto, el intervalo donde la función es cóncava hacia arriba es: $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

Intervalo donde la función es cóncava hacia abajo.

Por definición $f''(x) < 0$

$$-12x + 18 < 0$$

Al resolver la desigualdad se obtiene que $x > \frac{3}{2}$, entonces, el intervalo donde la función es cóncava hacia abajo es: $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

EJERCICIO 42

Dadas las siguientes funciones, determina:

a) Puntos máximos y mínimos.
b) Intervalos donde la función crece y decrece.
c) Intervalos de concavidad.
d) Puntos de inflexión.
e) Gráfica.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 10$
2. $f(x) = -x^2 + 4x + 6$
3. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 24$
5. $f(x) = x^4 - 4x^3$
6. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
7. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$
8. $f(x) = (x^2 - 1)^2$
9. $f(x) = \sqrt{x^2 + 36}$
10. $f(x) = x^3(x + 2)$
11. $f(x) = \text{sen}(2x)$ en $[0, \pi]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Optimización

Los métodos para obtener puntos máximos y mínimos de una función son una herramienta que se emplea para solucionar problemas prácticos donde se va a optimizar una variable.

Hay una gran variedad de problemas, por lo que resulta difícil dar reglas específicas para resolverlos. No obstante se dan algunas sugerencias:

- Leer cuidadosamente el problema y pensar en los hechos que se presentan y las variables desconocidas.
- Hacer un diagrama o dibujo geométrico que incluya los datos.
- Relacionar los datos con las variables desconocidas, hallando la función a maximizar o minimizar.
- Encontrar los valores críticos y determinar cuál corresponde a un máximo o a un mínimo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra dos números positivos cuya suma sea 20 y el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro, sea un valor máximo.

Solución

Sean x y y los números buscados, entonces:

La suma de los números es 20: $x + y = 20$

El producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro, es máximo: $P = x^2y^3$

Se despeja y de la primera igualdad y se sustituye en el producto:

$$x + y = 20 \quad \rightarrow \quad y = 20 - x$$

Por tanto: $P = x^2y^3 = x^2(20 - x)^3$ será la función a maximizar.

Se obtiene la derivada: $P'(x) = x(20 - x)^2(40 - 5x)$

La derivada se iguala con cero: $P'(x) = 0$, $x(20 - x)^2(40 - 5x) = 0$

Al resolver esta última ecuación se obtienen los valores críticos: $x = 0$, $x = 20$, $x = 8$

Se obtiene la segunda derivada: $P''(x) = -20x^3 + 720x^2 - 7\,200x + 16\,000$

Se analizan los valores críticos:

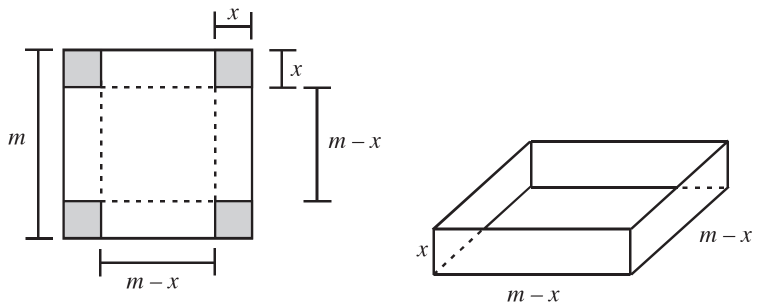
Para $x = 0$, $P''(0) = 16\,000 > 0$, entonces en $x = 0$ existe un valor mínimo
Para $x = 20$, $P''(20) = 0$, entonces en $x = 20$ no existe valor máximo ni mínimo
Para $x = 8$, $P''(8) = -5\,760 < 0$, entonces en $x = 8$ existe un valor máximo

Por tanto, uno de los valores es $x = 8$ y al sustituir en $y = 20 - x$, se obtiene $y = 12$, entonces los números que se buscan son:

$$x = 8, y = 12$$

2 De las cuatro esquinas de una lámina cuadrada de lado m, se suprimen cuadrados iguales de lado x. Se doblan los bordes de la lámina recortada para formar una caja sin tapa. Determina la longitud de x, para que el volumen de la caja sea máximo.

Solución



El volumen de la caja en términos de la variable x está dado por la función:

$$V(x) = (m - 2x)(m - 2x)(x) \qquad V(x) = (m - 2x)^2(x)$$

$$V(x) = (x)(m - 2x)^2$$

$$V(x) = (x)(m^2 - 4mx + 4x^2)$$

$$V(x) = m^2x - 4mx^2 + 4x^3 \text{ función a maximizar.}$$

Se encuentra la derivada respecto a la variable x de la función:

$$V'(x) = m^2 - 8mx + 12x^2$$

Se iguala a cero la derivada:

$$V'(x) = 0; \quad m^2 - 8mx + 12x^2 = 0$$

Al resolver se obtienen los valores críticos:

$$x = \frac{m}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{m}{6}$$

Se obtiene la segunda derivada y se evalúan los valores de x:

$$V''\left(\frac{m}{2}\right) = -8m + 24\left(\frac{m}{2}\right) = -8m + 12m = 4m > 0 \text{ mínimo}$$

$$V''\left(\frac{m}{6}\right) = -8m + 24\left(\frac{m}{6}\right) = -8m + 4m = -4m < 0 \text{ máximo}$$

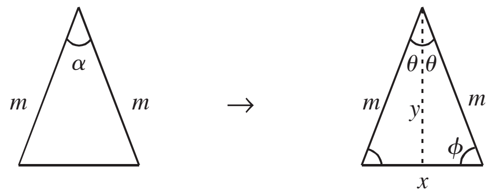
Por consiguiente, el valor de x para que la caja tenga un volumen máximo es:

$$x = \frac{m}{6}$$

3 Determina el ángulo que deben formar los lados iguales de un triángulo isósceles para que su área sea máxima.

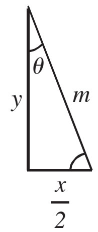
Solución

Se construye una figura con los datos:



Sea x la base y y la altura, entonces su área es $A = \frac{1}{2}xy$

Se toma la mitad del triángulo:



Se aplican identidades trigonométricas en el triángulo para el ángulo θ

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\frac{x}{2}}{m} = \frac{x}{2m} \quad \text{donde,} \quad x = 2m\operatorname{sen}\theta \qquad\qquad \cos\theta = \frac{y}{m} \quad \text{donde,} \quad y = m\cos\theta$$

Al sustituir los valores de x y y se obtiene:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}(2m\operatorname{sen}\theta)(m\cos\theta) \quad \rightarrow \quad A(\theta) = \frac{1}{2}m^2[2\operatorname{sen}\theta\cos\theta]$$

Pero $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}2\theta$, entonces $A = \frac{1}{2}m^2\operatorname{sen}2\theta$, ésta es la función a maximizar.

Se obtiene la derivada y se iguala a cero:

$$A'(\theta) = m^2\cos 2\theta \quad \rightarrow \quad A'(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad m^2\cos 2\theta = 0$$

$m \neq 0$; entonces $\cos 2\theta = \frac{0}{m^2} = 0$, despejando el ángulo:

$$\cos 2\theta = 0 \qquad 2\theta = \cos^{-1}(0)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}(0)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Se obtiene la segunda derivada y se evalúa en $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$A''(\theta) = -2m^2 \operatorname{sen} 2\theta \quad \rightarrow \quad A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2 \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2(1)$$

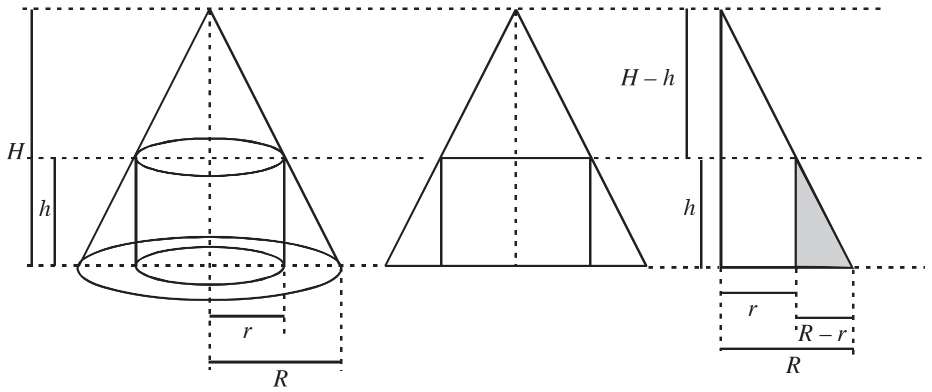
$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2m^2 < 0$$

El área es máxima para $\theta = \frac{\pi}{4}$ y el ángulo que deben formar los lados iguales es de 90°

4 Calcula el volumen máximo del cilindro circular recto que se puede inscribir en un cono de H cm de altura y R cm de radio en su base, de manera que los ejes del cilindro y el cono coincidan.

Solución

Observa la figura.



De acuerdo con ella se hace un corte transversal y se obtiene el triángulo que se muestra; por construcción se tienen triángulos semejantes que cumplen con la siguiente proporción:

$$\frac{R}{R-r} = \frac{H}{h}$$

El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

Despejando h de la proporción y sustituyéndola en la fórmula del volumen se obtiene:

$$h = \frac{HR - Hr}{R} = H - \frac{H}{R}r \quad \rightarrow \quad V = \pi r^2 h = \pi r^2\left(H - \frac{H}{R}r\right) = \pi H r^2 - \frac{\pi H r^3}{R}$$

La cual es la función a maximizar.

Se deriva la función:

$$V'(r) = 2\pi Hr - \frac{3\pi Hr^2}{R}$$

La derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación para r:

$$V'(r) = 0, \qquad 2\pi Hr - \frac{3\pi Hr^2}{R} = 0$$

Si $R \neq 0$, entonces $2\pi HRr - 3\pi Hr^2 = 0 \rightarrow \pi Hr(2R - 3r) = 0 \rightarrow r(2R - 3r) = 0$
Valores críticos:

$$r = 0, r = \frac{2}{3}R$$

Se analizan los valores críticos en la segunda derivada:

$$V''(r) = 2\pi H - \frac{6\pi H}{R}r$$

Para $r = 0$; $V''(0) = 2\pi H - \frac{6\pi H}{R}(0) = 2\pi H > 0$, entonces, el volumen es mínimo.

Para $r = \frac{2}{3}R$; $V''\left(\frac{2}{3}R\right) = 2\pi H - \frac{6\pi H}{R}\left(\frac{2}{3}R\right) = -2\pi H < 0$, entonces, el volumen es máximo.

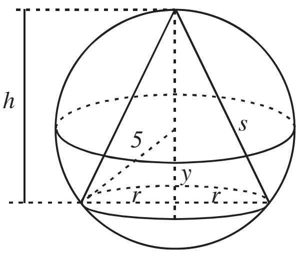
Entonces, las dimensiones del cilindro de volumen máximo inscrito en el cono son:

$$r = \frac{2}{3}R \text{ y } h = H - \frac{H}{R}r = H - \frac{H}{R}\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{1}{3}H$$

5 Determina las dimensiones del cono circular recto de área máxima, que puede inscribirse en una esfera de radio $R = 5$u

Solución

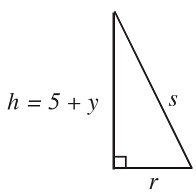
Figura



El área del cono de radio r, altura h y generatriz s, está dada por:

$$A = \pi rs$$

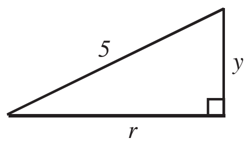
De la figura se toma el triángulo rectángulo



Mediante el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$s^2 = (5 + y)^2 + r^2 \qquad s = \sqrt{(5+y)^2 + r^2}$$

De la figura se toma el triángulo rectángulo,



Por el teorema de Pitágoras:

$$5^2 = r^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad r^2 = 25 - y^2$$

Este resultado se sustituye en: $s = \sqrt{(5+y)^2 + r^2}$

$$s = \sqrt{(5+y)^2 + (25 - y^2)}$$

y a su vez en $A = \pi rs$

$$A = \pi\, r\, \sqrt{(5+y)^2 + 25 - y^2}$$

Maximizar A equivale a maximizar A^2, y el problema se reduce a términos simples, es decir:

$$A^2 = \pi^2 r^2\left[(5+y)^2 + 25 - y^2\right], \text{ pero } r^2 = 25 - y^2, \text{ entonces:}$$

$$A^2 = \pi^2(25 - y^2)\left[(5+y)^2 + 25 - y^2\right] \quad \rightarrow \quad A^2 = \pi^2(25 - y^2)\left[25 + 10y + y^2 + 25 - y^2\right]$$

$$A^2 = \pi^2(25 - y^2)(50 + 10y)$$

$$A^2 = \pi^2(25 - y^2)(10)(5 + y)$$

$$A^2 = 10\pi^2(125 + 25y - 5y^2 - y^3)$$

Si $A^2 = f(y)$, entonces, $f(y) = 10\pi^2(125 + 25y - 5y^2 - y^3)$ es la función a maximizar.

Paso I
Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(y) = 10\pi^2(25 - 10y - 3y^2)$$

Paso II
La derivada se iguala a cero y se determinan los valores críticos:

$$f'(y) = 0 \quad \rightarrow \quad 10\pi^2(25 - 10y - 3y^2) = 0 \quad \rightarrow \quad y = -5,\ y = \frac{5}{3}$$

Paso III
Se evalúan los valores críticos en la segunda derivada para determinar los máximos o mínimos de la función:

$$f''(y) = 10\pi^2(-10 - 6y)$$

Para $y = -5$

$$f''(-5) = 10\pi^2(-10 - 6(-5)) = 200\pi^2 > 0, \text{ mínimo.}$$

Para $y = \dfrac{5}{3}$,

$$f''\left(\frac{5}{3}\right) = 10\pi^2\left(-10 - 6\left(\frac{5}{3}\right)\right) = -200\pi^2 < 0, \text{ máximo.}$$

Entonces, para $y = \dfrac{5}{3}$ el área del cono es máxima, sustituyendo en las fórmulas: $r^2 = 25 - y^2$ y $h = 5 + y$, se obtienen las dimensiones del radio y la altura del cono inscrito en la esfera:

$$r^2 = 25 - y^2 \qquad\qquad h = 5 + y$$

$$r = \sqrt{25 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} \qquad\qquad h = 5 + \frac{5}{3}$$

$$r = \sqrt{25 - \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{200}{9}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}\text{ u} \qquad\qquad h = \frac{20}{3}\text{ u}$$

Finalmente, el radio y la altura miden respectivamente:

$$r = \frac{10}{3}\sqrt{2}\text{ u} \qquad h = \frac{20}{3}\text{ u}$$

EJERCICIO 43

Resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra dos números cuya suma sea 40 y su producto sea máximo.
2. Encuentra dos números cuya diferencia sea 50 y su producto mínimo.
3. Con una lámina cuadrada de aluminio de 12 pulgadas por lado, se quiere construir una caja sin tapa, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los bordes. ¿Cuánto deben medir por lado los cuadrados recortados para obtener un volumen máximo?, ¿Cuánto mide dicho volumen?
4. Calcula el volumen máximo de un cilindro circular recto que se puede inscribir en un cono de 72 cm de altura y 24 cm de radio en su base, de manera que los ejes del cilindro y el cono coincidan?
5. En la construcción de un recipiente cilíndrico de hojalata se emplean 100 pulg^2, esta cantidad incluye las tapas. ¿Cuál es el mayor volumen que podría tener la lata?
6. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener un cono de volumen máximo cuya área lateral es de 10 πu^2?
7. Un cartel tiene una superficie de 150 cm^2 con márgenes de 3 cm en las partes superior e inferior y 2 cm a los lados. Calcula el área máxima impresa en el cartel.
8. Considera un triángulo rectángulo con sus catetos sobre los ejes de coordenadas y la hipotenusa pasa por el punto (4, 3). Determina el área mínima que puede encerrar tal triángulo.
9. ¿Qué número positivo minimiza la suma entre él y su recíproco?
10. Determina las dimensiones del triángulo isósceles de superficie máxima que podría inscribirse en un círculo de radio r.
11. ¿Cuáles son los dos puntos sobre la curva $y = x^3$ cuyas abscisas difieren en dos unidades, de tal forma que la recta que los une tiene una pendiente mínima?
12. ¿Cuál es el área máxima posible de un rectángulo, cuya base coincide con el eje X y sus vértices superiores están en la curva $y = 4 - x^2$?
13. Encuentra las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un semicírculo de radio igual a 2 unidades.
14. La resistencia de una viga rectangular varía según sus dimensiones. Si la resistencia es proporcional al cuadrado del ancho de la viga por la altura, ¿cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que podrá cortarse de un tronco cilíndrico con radio de 3 pies?

15. ¿Cuál es la distancia mínima que existe entre el punto (5, 1) y la parábola $y = -x^2$?
16. La suma de dos números es 16. Encuentra los números si la suma de sus cubos es un valor mínimo.
17. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor perímetro que se puede inscribir en un semicírculo con radio de 5 unidades?
18. Se inscribe un rectángulo en un triángulo isósceles, cuyos lados tienen longitudes 5, 5 y 6. Uno de los lados del rectángulo está sobre la base del triángulo (lado desigual), ¿cuál es el área mayor que puede abarcar el rectángulo?
19. Se desea inscribir un cono dentro de otro. El cono exterior tiene una altura de 6 cm y un radio de 4 cm. El cono interior se inscribe de modo que su cúspide reposa sobre la base del cono exterior. La base del cono interior es paralela a la base del cono exterior. Los ejes de los conos son colineales. ¿Cuál deberá ser la altura del cono interior, a fin de que contenga el mayor volumen posible?
20. Calcula las dimensiones de un triángulo isósceles con un perímetro de 6 unidades que tenga área máxima.
21. Determina dos números reales positivos, cuya suma sea 40 y su producto sea máximo.
22. Encuentra las dimensiones del cono recto circular de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio 6 unidades.
23. Obtén las coordenadas del punto de la recta $3x + y - 5 = 0$ más cercano al origen.
24. ¿Cuál es el área del rectángulo mayor que se puede inscribir en un triángulo rectángulo de lados 5, 12 y 13 cm?
25. Calcula el área del rectángulo mayor que se puede inscribir en la elipse, cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
26. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 4) y forma con el primer cuadrante un triángulo de área mínima.
27. ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro circular recto de máxima área lateral que puede inscribirse en una esfera de radio de ocho pulgadas?
28. Para la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, considera el punto $(0, k)$ sobre su eje conjugado y determina el punto más cercano a éste.
29. Determina dos números positivos cuyo producto es 16 y tienen suma mínima.
30. En la construcción de una casa se van a emplear ventanas en forma de rectángulos curvados por semicírculos. Si el perímetro total de cada ventana es P, ¿cuáles son las dimensiones más convenientes para que las ventanas proporcionen máxima iluminación?
31. Una persona tiene una pared de piedra en el costado de un terreno. Dispone de 1 600 m de material para cercar y desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados, ¿qué dimensiones debe tener el corral para tener la mayor área posible?
32. Un alambre de 100 cm de largo se va a partir en dos trozos, una de las partes se va a doblar para formar una circunferencia, y la otra un triángulo equilátero. ¿Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas del círculo y del triángulo sea máxima?
33. Se desea construir un cono con una generatriz de 10 cm. ¿Cuál es el mayor volumen posible para dicho cono?
34. Encuentra las dimensiones del rectángulo inscrito en un círculo con radio de 25 cm que proporcione el área máxima.
35. Para construir un recipiente cilíndrico de hojalata se emplearán 150 pulg^2, esta cantidad incluye las tapas. ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro para que contenga el volumen máximo?
36. Un anuncio de 20 metros de altura está colocado sobre una base que se encuentra 5 metros sobre el nivel de los ojos de una persona, ¿qué tan alejada debe estar la persona para que su ángulo de visión sea máximo?
37. Un silo consta de un cilindro con una parte superior semiesférica. Determina la longitud del radio del silo con un volumen V, que tiene la menor área de superficie, incluye la tapa inferior.
38. ¿Cuáles son los puntos sobre la curva $y = x^2 - 4$, que están más cerca del punto $(-2, 1)$?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Movimiento rectilíneo uniforme

Si un punto se mueve sobre una recta una distancia s, en un tiempo t con velocidad uniforme v, entonces:

$$v = \frac{s}{t}\text{, de aquí } s = v \cdot t$$

Sean (s_1, t_1) y (s_2, t_2) dos pares de valores de s y t, tal que:

$$s_1 = vt_1 \text{ y } s_2 = vt_2$$

Entonces:

$$s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1)$$

Donde:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \text{velocidad uniforme}$$

El concepto de velocidad media es más general que el de velocidad uniforme para cualquier tipo de movimiento rectilíneo.

La distancia dirigida s, de un punto P, desde un origen en un tiempo t, está dada por:

$$s = s(t)$$

Entonces, a la función $s = \{(t, s) \mid s = s(t)\}$ se le denomina “función de posición” del punto P y la velocidad media de P durante el intervalo $[t_1, t_2]$ se define como:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Si $t_2 - t_1 = h$, entonces $t_2 = t_1 + h$ con $h \neq 0$, luego $s(t_2) = s(t_1 + h)$ y la velocidad media de P durante el intervalo $[t_1, t_2] = [t_1, t_1 + h]$ es:

$$\frac{s(t_1 + h) - s(t_1)}{h}$$

Se obtiene el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(t_1 + h) - s(t_1)}{h}$$

Este límite se llama *velocidad instantánea*, rapidez o simplemente velocidad de P en el tiempo t. Un físico interpretaría esto como el valor límite de las velocidades medias, medidas sobre las porciones de tiempo cada vez menores alrededor de t.

Al generalizar:

Si la función de posición de un punto P es:

$$s = \{(t, s) \mid s = s(t)\}$$

La velocidad de P en el tiempo t será:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

La cual se denomina función velocidad del punto P.

Puesto que $s = s(t)$, $v = v(t)$ y $v(t) = \dfrac{ds(t)}{dt}$, entonces $v = \dfrac{ds(t)}{dt}$

Aceleración media

$v = \{(t, v) \mid v = v(t)\}$ la razón $\dfrac{v(t_1 + h) - v(t_1)}{h}$, se llama velocidad media de P, durante el intervalo $[t_1, t_2] = [t_1, t_1 + h]$

Si existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(t_1 + h) - v(t_1)}{h}$, entonces se le denomina aceleración de P en el tiempo t_1 y se denota mediante $a(t_1)$, entonces:

$$a(t_1) = \left.\frac{dv(t_1)}{dt}\right|_{t_1} = v'(t_1) = s''(t_1)$$

Por tanto:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Ejemplo

Una partícula se mueve conforme a la expresión $s(t) = 2t^2 - 3t + 3$, donde s se expresa en metros y t en segundos.

Determina:

a) Su posición inicial.
b) Su velocidad al inicio de su movimiento.
c) La velocidad que alcanza al transcurrir 3 segundos.
d) La velocidad final a los 5 segundos.
e) Su aceleración.

Solución

a) Su posición inicial se determina cuando $t = 0$, entonces,

$$s(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 3 = 3 \text{ m}$$

b) La velocidad al inicio de su movimiento se obtiene mediante la primera derivada evaluada en $t = 0$

$$s(t) = 2t^2 - 3t + 3 \quad \rightarrow \quad v(t) = 4t - 3$$
$$v(0) = 4(0) - 3 = -3 \ \frac{m}{s}$$

c) La velocidad cuando $t = 3$ segundos

$$v(t) = 4t - 3 \quad \rightarrow \quad v(3) = 4(3) - 3 = 9 \ \frac{m}{s}$$

d) La velocidad cuando $t = 5$ segundos

$$v(t) = 4t - 3 \quad \rightarrow \quad v(5) = 4(5) - 3 = 17 \ \frac{m}{s}$$

e) Su aceleración se obtiene mediante la segunda derivada:

$$s(t) = 2t^2 - 3t + 3 \quad \rightarrow \quad s'(t) = 4t - 3 \quad \rightarrow \quad a = s''(t) = 4 \ \frac{m}{s^2}$$

EJERCICIO 44

Resuelve los siguientes problemas:

1. La posición de una partícula se expresa mediante la función $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 10t$, con s en metros y t en segundos. ¿Cuál es su rapidez para $t = 1, \frac{3}{2}, 0$ segundos?
2. La distancia recorrida por un automóvil sobre una carretera en el instante t está dada por $s(t) = 9t^4 - 120t^3 + 432t^2$, ¿en qué intervalos su velocidad media es positiva?
3. La trayectoria de una partícula en movimiento rectilíneo está dada por la función:
$$s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 2$$
Encuentra:
a) s y a cuando $v = 0$
b) s y v cuando $a = 0$
c) Cuando s aumenta
d) Cuando v aumenta
4. Un proyectil es lanzado con una trayectoria que obedece a la función $s(t) = -3t^2 + 54t$. *a*) Calcula en qué tiempo hace contacto con su objetivo que se encuentra sobre la superficie terrestre y la velocidad que lleva en ese instante. *b*) En qué instante logra su altura máxima y cuál es el valor de esta.
5. Un proyectil es lanzado en dirección a una torre de 36 m de altura. El proyectil sigue la trayectoria de acuerdo con la función $s = -t^2 + 12t$, después de siete segundos. Indica la velocidad y la altura en la que hace contacto el proyectil con la torre.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Razón de cambio

Si una cantidad x está en función del tiempo t, la razón de cambio de x con respecto a t está dada por $\frac{dx}{dt}$. Si dos o más cantidades se relacionan con una ecuación, la razón de cambio de cada cantidad se obtiene derivando la ecuación.

Pasos para resolver problemas de razón de cambio:

- Se traza un dibujo que contemple todas las variables y constantes que intervengan en el problema.
- Se elabora un modelo matemático que relacione las variables.
- Se deriva el modelo matemático respecto al tiempo, se despeja la incógnita a conocer y se sustituyen los datos dados.

EJEMPLOS

Ejemplos

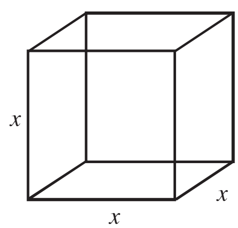
1 Un cubo de hielo de 10 cm^3 de volumen, comienza a derretirse a razón de $6\frac{cm^3}{s}$, ¿cuál es la razón de cambio de la superficie del cubo en ese instante?

Solución

Se construye un cubo de arista x cuyo volumen es $V = 10\ cm^3$ y la razón con la que se derrite es

$$\frac{dV}{dt} = -6\frac{cm^3}{s}$$

(El signo indica que el volumen del cubo está decreciendo.)



Se deriva el volumen $V = x^3$ respecto al tiempo: $\frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$

$$-6 = 3x^2\frac{dx}{dt} \text{ se despeja } \frac{dx}{dt}$$

$$-\frac{6}{3x^2} = \frac{dx}{dt}$$

La razón con que disminuye la arista es: $\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{x^2}$

El área total del cubo es $A = 6x^2$ y la razón con que cambia el área es:

$$\frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt}$$

Pero $\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{x^2}$, entonces:

$$\frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt} = 12x\left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{24}{x}$$

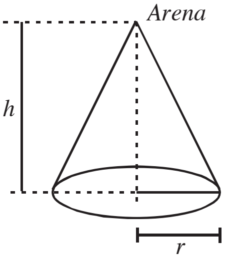
Si el volumen es de $10\text{ cm}^3 = x^3$, entonces $x = \sqrt[3]{10}$, por tanto:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{24}{\sqrt[3]{10}}\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

El área disminuye a razón de $\frac{24}{\sqrt[3]{10}}\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$

2 Se está vaciando arena sobre un montón de forma cónica a razón de $30\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$, la altura del cono es siempre igual al radio de su base. ¿Con qué rapidez aumenta su altura cuando el montón tiene tres metros de altura?

Solución



El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, pero $r = h$, entonces $V = \frac{1}{3}\pi h^3$ y $\frac{dV}{dt} = 30\frac{m^3}{min}$

Al derivar el volumen respecto del tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2\frac{dh}{dt} \quad \text{donde} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Al sustituir $\frac{dV}{dt} = 30\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ y $h = 3\text{m}$

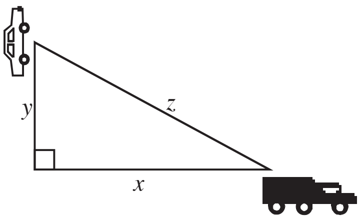
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi(3)^2}(30) = \frac{30}{9\pi} = \frac{10}{3\pi}$$

Por consiguiente, la altura aumenta a razón de $\frac{10}{3\pi}\frac{\text{m}}{\text{min}}$

3 Un automóvil se dirige al norte de una ciudad a razón de $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, al mismo tiempo un camión se dirige al este de la ciudad a razón de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$. ¿Cuál es la razón con la que varía la distancia entre los vehículos cuando el automóvil y el camión se encuentran a 30 y 40 km, respectivamente, de su punto de partida?

Solución

Se realiza el dibujo con las características establecidas:



Donde,

$$x = 40 \text{ km}, y = 30 \text{ km}; \ \frac{dy}{dt} = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}; \ \frac{dx}{dt} = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Se debe encontrar con qué rapidez se separan los vehículos $\left(\frac{dz}{dt}\right)$

La figura representa un triángulo rectángulo, por tanto, se aplica el teorema de Pitágoras para obtener la relación:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Se deriva la expresión respecto al tiempo:

$$\frac{dz^2}{dt} = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} \quad \rightarrow \quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \text{(simplificando)}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{y}{z}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Luego, en el momento en que $x = 40$ km; $y = 30$ km

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2\,500} = 50 \text{ km}$$

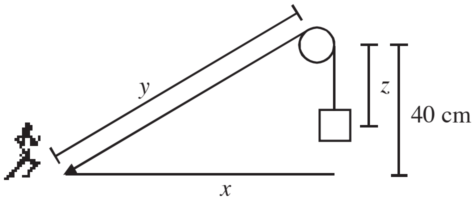
Entonces,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{40 \text{ km}}{50 \text{ km}}\left(80\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) + \frac{30 \text{ km}}{50 \text{ km}}\left(60\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(40)(80) + (30)(60)}{50} = \frac{3200 + 1800}{50} = \frac{5\,000}{50} = 100\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

4 Una persona sostiene un extremo de una cuerda de 150 cm de largo y en el otro extremo cuelga un bloque. La cuerda pasa por una polea que está a 40 cm de altura directamente sobre la mano de la persona, si ésta se aleja de la polea a razón de 10 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez se eleva el bloque cuando está a 6 cm de la polea?

Solución



La persona se aleja de la polea a $10\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ entonces, $\frac{dx}{dt} = 10\frac{\text{cm}}{\text{s}}$

En la figura, por el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$y^2 = x^2 + (40)^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = x^2 + 1\,600$$

Luego, la medida de la cuerda está dada por:

$$y + z = 150 \qquad \text{donde,} \qquad y = 150 - z$$

Este resultado se sustituye en $y^2 = x^2 + 1\,600$

$$y^2 = x^2 + 1\,600 \quad \rightarrow \quad (150 - z)^2 = x^2 + 1\,600$$

Se deriva respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}(150 - z)^2 = \frac{d}{dt}(x^2 + 1600) \quad \rightarrow \quad 2(z - 150)\left(\frac{dz}{dt}\right) = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x}{2(z-150)}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z-150}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $z = 6$ cm

$$x^2 + 1\,600 = (150 - z)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + 1\,600 = (150 - 6)^2$$

$$x^2 + 1\,600 = (144)^2$$

$$x^2 = 20\,736 - 1\,600$$

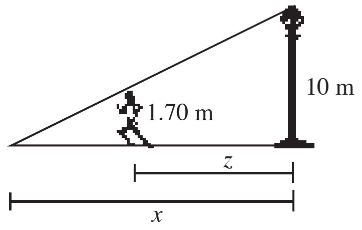
$$x^2 = 19\,136;\ x = \sqrt{19\,136}$$

Por tanto, la razón con la que se eleva el bloque es de:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{(z-150)}\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{19\,136}}{6-150}(10) = -\frac{\sqrt{19\,136}}{144}(10) = -\frac{5(8)\sqrt{299}}{72} = -\frac{5\sqrt{299}}{9}\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

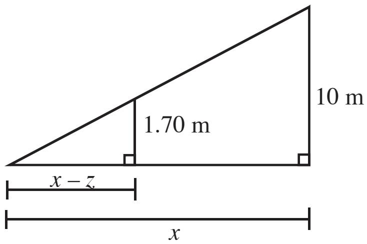
5 Un hombre de 1.70 m de altura se aleja de un poste de alumbrado a razón de 3 m/s, la lámpara del poste está a 10 m de altura. Determina la razón de cambio a la cual se mueve el extremo de la sombra del hombre.

Solución



De acuerdo con la figura $\frac{dz}{dt} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y la incógnita es $\frac{dx}{dt}$

Por triángulos semejantes:



Se obtiene:

$$\frac{10}{1.70} = \frac{x}{x-z} \quad \rightarrow \quad 10(x-z) = 1.70x$$

$$10x - 10z = 1.70x$$

$$10x - 1.70x = 10z$$

$$8.30x = 10z$$

Se deriva la expresión, resultando:

$$8.30\frac{dx}{dt} = 10\frac{dz}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{10}{8.30}\frac{dz}{dt}$$

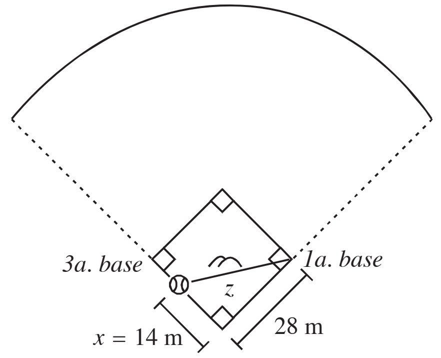
Luego, $\frac{dz}{dt} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$, entonces,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{8.30}(3) = \frac{30}{8.30} = 3.61\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Finalmente, la razón con que se mueve el extremo de la sombra es de 3.61 m/s.

6 La distancia que existe entre las bases de un campo de béisbol es de 28 m. Si la pelota se batea por la línea en dirección a la tercera base con una velocidad de $32\frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre la pelota y la primera base cuando se encuentra a la mitad del camino hacia la tercera base?

Solución



En la figura se observa que:

$$z^2 = x^2 + (28)^2$$

En la cual, al derivar se obtiene:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{2x}{2z}\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt}$$

Luego, cuando x se encuentra a la mitad del recorrido, la distancia de z es:

$$z^2 = (14)^2 + (28)^2 = 196 + 784 \quad \rightarrow \quad z = \sqrt{980} = 14\sqrt{5}\ \text{m}$$

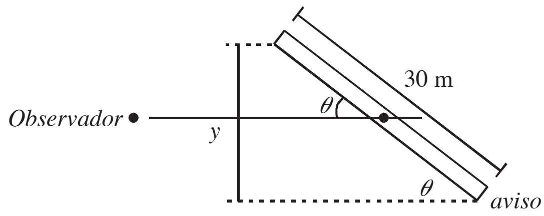
Al sustituir $z = 14\sqrt{5}$, $x = 14$ y $\frac{dx}{dt} = 32\frac{\text{m}}{\text{s}}$ en $\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt}$, se obtiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{14}{14\sqrt{5}}\right)(32) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(32) = \frac{\sqrt{5}}{5}(32)$$

Por consiguiente, la pelota se aleja de la primera base a razón de $\frac{32}{5}\sqrt{5}\frac{\text{m}}{\text{s}}$

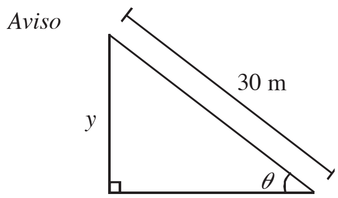
7 Un aviso rectangular que mide 30 m de ancho da vueltas sobre un eje vertical que pasa por el centro del rectángulo a razón de 10 rpm. Una persona que observa a distancia el aviso lo ve como un rectángulo de ancho variable. ¿Con qué rapidez cambia el ancho aparente del aviso cuando éste tiene 12 m de ancho, según lo ve el observador, y su ancho está aumentando?

Solución



Sea y el ancho aparente del aviso, también se sabe que gira a 10 rpm, que es lo mismo que 20π rad/min, entonces se tiene que encontrar la relación que existe entre y y θ.

De la figura:



Se obtiene:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{30} \qquad \rightarrow \qquad y = 30 \operatorname{sen}\theta$$

Derivando la expresión anterior:

$$\frac{dy}{dt} = 30\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Luego, cuando $y = 12$ m, entonces:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

Como el ancho del aviso está aumentando, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por tanto:

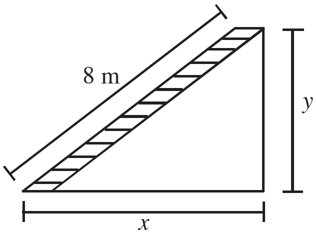
$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 23.5°$$

$$\frac{dy}{dt} = 30\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = 30\cos(23.5°)(20\pi) = 30(0.9170)(20\pi) = 550.2\pi\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

8 Una escalera de 8 m de longitud está apoyada sobre un piso horizontal y contra una pared. Si el extremo inferior de la escalera se aleja del muro a razón de $\frac{3}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez desciende el extremo superior en el instante en que su altura sobre el suelo es de 3 m?

Solución

Sea y la altura generada por la escalera sobre la pared, x la distancia generada por el extremo inferior y la pared, entonces,



Por el teorema de Pitágoras:

$$(8)^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad 64 = x^2 + y^2$$

Se deriva la expresión:

$$\frac{d64}{dt} = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} \quad \rightarrow \quad 0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

Se despeja $\frac{dy}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{2y}\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $y = 3$, el valor de x está determinado por:

$$(8)^2 = x^2 + (3)^2 \qquad 64 = x^2 + 9$$

$$64 - 9 = x^2$$

$$x = \sqrt{55}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y}\frac{dx}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{-\sqrt{55}}{3}\left(\frac{3}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{55}}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El signo menos indica que la altura sobre la pared está decreciendo.

EJERCICIO 45

1. Si la altura de un determinado árbol es de $10\sqrt{2}\,r^{\frac{3}{2}}$ cm, donde r es el radio de la parte transversal del tronco del árbol. Si el radio aumenta a razón de $\frac{1}{6}\frac{\text{cm}}{\text{año}}$, ¿con qué rapidez cambia la altura cuando su radio es de 5 cm?
2. Un náufrago es remolcado hacia un barco con un cable. La proa de donde se jala el cable se encuentra a 7 m del nivel del mar y el cable es jalado a razón de $12\frac{\text{m}}{\text{min}}$. ¿Con qué rapidez se está moviendo el náufrago hacia el barco cuando se encuentra a 20 m de la base del barco?
3. Un automóvil que viaja a $80\frac{\text{m}}{\text{s}}$ cruza un puente sobre un río, 20 segundos antes de que un bote que viaja a $40\frac{\text{m}}{\text{s}}$ pase por debajo del puente. Vistos desde arriba, el río y el puente forman un ángulo recto. ¿Con qué rapidez se están separando el automóvil y el bote 20 segundos después de que el bote pasa por debajo del puente?
4. Un globo de forma esférica, se infla a razón de $0.16\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ¿Cuál es el volumen del globo cuando su radio está aumentando a razón de $0.20\frac{\text{m}}{\text{min}}$?
5. Una escalera de 13 m de largo está apoyada sobre una pared. Encuentra la rapidez con que baja el extremo superior de la escalera, cuando su extremo inferior dista 5 m del muro y se separa a razón de $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$
6. Al caer una piedra a un estanque de aguas tranquilas forma una onda circular, cuyo radio aumenta a razón de $1\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez aumenta el área encerrada por la onda cuando el radio es de 5 cm?
7. Un tanque cilíndrico de 7 m de radio y 10 m de altura se llena de agua. Se hace un agujero en el fondo del tanque, en ese momento el agua sale a razón de $3\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ¿A qué rapidez está cambiando la altura del líquido en el tanque?
8. Un satélite se mueve en una órbita elíptica alrededor de un planeta. La ecuación de su órbita plana es de $9x^2 + 16y^2 = 144$. Si la rapidez del satélite en una dirección x es de $15\frac{\text{km}}{\text{h}}$, cuando la coordenada x es de $\frac{36}{\sqrt{137}}$ km. ¿Cuál es la rapidez en la dirección y en ese instante?
9. Los automóviles A y B salen del mismo punto. El automóvil A viaja hacia el este a razón de $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y el automóvil B viaja hacia el norte a $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A qué razón está cambiando la distancia entre los dos a las 14:00 horas, si:
   a) *A* y *B* salen a las 12:00 a.m.
   b) *A* sale a las 12 del día y *B* sale a la 13:00 horas.
10. Se está vaciando un depósito cónico de 1.5 m de radio y 5 m de altura, a razón de $0.16\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ¿Cómo está bajando el nivel cuando la profundidad del agua es de 2 m?
11. En un crucero un camión sale a las 10:00 horas y viaja hacia el oeste a 60 km/h. Un automóvil sale a las 13:00 horas del mismo lugar y viaja hacia el norte a 80 km/h. ¿A qué razón se están separando a las 15:00 horas?
12. Un globo asciende sobre un punto a razón de $6\frac{\text{m}}{\text{s}}$; un observador está situado a 300 m del punto de despegue del globo. Cuando el globo está a 400 m de altura, ¿con qué rapidez está cambiando la distancia entre el globo y el observador?
13. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de $7\frac{\text{pies}^3}{\text{min}}$. Si la presión se mantiene constante. ¿Con qué rapidez cambia el radio cuando éste es de 1 pie?

14. El área de un triángulo equilátero disminuye a razón de $6\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$. Calcula la rapidez de cambio de la longitud de sus lados en el momento en que el área del triángulo es de 100 cm^2.
15. Un punto se mueve sobre la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ de tal manera que su ordenada aumenta siete unidades por segundo. Cuando $y = 1$, ¿con qué rapidez cambia su abscisa?
16. Una persona está de pie en un muelle y jala una lancha por medio de una cuerda. Sus manos están a 2 m por encima del amarre de la lancha. Si la persona jala la cuerda a razón de $70\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. ¿Con qué rapidez se aproxima la lancha al muelle cuando se encuentra a 5 m de él?
17. Un hombre de 1.80 m de estatura camina en línea recta a $1.5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ alejándose de un faro que se encuentra a 8 metros de altura sobre el suelo. ¿Con qué rapidez se mueve el extremo de su sombra?, ¿Cuál es la rapidez con la que cambia la longitud de su sombra?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicaciones a la economía

Sea x el número total de unidades producidas por una empresa y m el precio de venta por unidad, el ingreso se obtiene con la función:

$$I(x) = mx$$

Si el precio de venta depende linealmente del número de unidades producidas, $m = ax + b$, la función de ingreso se expresa como:

$$I(x) = mx \quad \rightarrow \quad I(x) = (ax + b)x \quad \rightarrow \quad I(x) = ax^2 + bx$$

Sea $C(x)$ el costo de producir x unidades, la utilidad de la empresa se expresa:

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

Y el costo medio por unidad está dado por la expresión:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Otra forma de expresar la función de costo puede ser:

$$C = \text{costos variables} + \text{costos fijos}$$

Por ejemplo, si se tiene la función $C(x) = 4x^2 + 6x + 850$, los costos fijos son el término independiente de la función, es decir, 850, al ser x el número de unidades, entonces $x \geq 0$ por consiguiente, el costo fijo de producción es $C(0) = 850$.

Ejemplo

Las funciones de ingreso y costo son $I(x) = -2x^2 + 340x$ y $C(x) = 3x^2 + 600$. Determina la utilidad máxima y el costo mínimo en pesos.

Solución

La utilidad $U(x) = I(x) - C(x), \ x \geq 0$

$$U(x) = (-2x^2 + 340x) - (3x^2 + 600)$$

$$U(x) = -2x^2 + 340x - 3x^2 - 600$$

$$U(x) = -5x^2 + 340x - 600$$

Se obtiene la derivada de la función de la utilidad:

$$U'(x) = -10x + 340$$

Se obtiene el valor crítico haciendo $U'(x) = 0$

$$-10x + 340 = 0$$

$$-10x = -340$$

$$x = \frac{-340}{-10} = 34$$

Se evalúa $x = 34$ en la segunda derivada para verificar si existe un valor máximo.

$$U''(x) = -10$$

$$U''(34) = -10 < 0$$

Entonces para $x = 34$ existe un valor máximo.
Por consiguiente, se necesita producir 34 unidades para obtener una utilidad máxima, la cual es de:

$$U(34) = -5(34)^2 + 340(34) - 600 = 5180$$

Por tanto, la utilidad máxima es de \$5 180.00
Por otro lado el costo medio está dado por:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

$$Q(x) = \frac{3x^2 + 600}{x}$$

$$Q(x) = 3x + \frac{600}{x}$$

Se obtiene la derivada de la función de costo medio

$$Q'(x) = 3 - \frac{600}{x^2}$$

Se obtiene el valor crítico haciendo $Q'(x) = 0$

$$3 - \frac{600}{x^2} = 0$$

$$3x^2 - 600 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{200}$$

$$x = \pm 10\sqrt{2}$$

Se verifica que sea el valor mínimo, esto se obtiene evaluando el valor crítico en la segunda derivada

$$Q''(x) = \frac{1200}{x^3}$$

$$Q''\left(10\sqrt{2}\right) = \frac{1200}{\left(10\sqrt{2}\right)^3} = \frac{1200}{(200)\left(10\sqrt{2}\right)} = \frac{3}{5\sqrt{2}} > 0$$

Entonces, para $x = 10\sqrt{2} \approx 14$, hay un valor mínimo.

Para determinar el costo medio mínimo de forma aproximada se sustituye el valor crítico en la función de costo medio:

$$Q(x) = 3(14) + \frac{600}{14}$$

$$Q(x) = 42 + 42.86$$

$$Q(x) = 84.86$$

Por tanto, el costo mínimo aproximado es de \$84.86

Costo marginal

Si $C(x)$ es la función de costo total que tiene una empresa por producir x unidades de algún artículo y la empresa incrementa el número de unidades de x_0 a x_1 ($x_0 < x_1$), el costo se incrementa $C(x_1) - C(x_0)$, la razón de cambio del costo es:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_1) - C(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{C(x_0 + \Delta x) - C(x_0)}{\Delta x}$$

En economía, la expresión $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{C(x_0 + \Delta x) - C(x_0)}{\Delta x}$ es la derivada de la función de costo total y recibe el nombre de costo marginal $C'(x)$ y representa el incremento del costo al incrementar la producción.

Para $\Delta x = 1$ y x_0 suficientemente grande (tan grande que Δx sea pequeño respecto a x_0) se tiene que:

$$C'(x_0) \approx C(x_0 + 1) - C(x_0)$$

Luego, el costo de producir $x_0 + 1$ unidades es aproximadamente el mismo de producir x_0 unidades.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una empresa estima que el costo (en pesos) por producir x artículos es de:

$$C(x) = 0.02x^2 + 3x + 12000$$

Determina el costo marginal en un nivel de producción de 600 artículos y el costo real de producir el 601ésimo artículo.

Solución

Se obtiene la función del costo marginal:

$$C'(x) = 0.04x + 3$$

El costo marginal aproximado para 600 artículos es:

$$C'(600) = 0.04(600) + 3 = 27$$

Por tanto, el costo marginal aproximado por artículo es de \$27.00

El costo real de producción del 601ésimo artículo es:

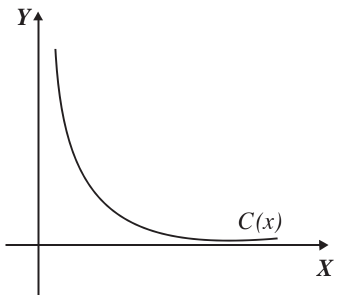
$$C(601) - C(600) = [0.02(601)^2 + 3(601) + 12\,000] - [0.02(600)^2 + 3(600) + 12\,000]$$

$$C(601) - C(600) = 21\,027.02 - 21\,000$$

$$C(601) - C(600) = 27.02$$

Se observa que $27 \approx 27.02$, es decir $C'(600) \approx C(600 + 1) - C(600)$, lo cual se había indicado antes.

El costo por unidad está dado por la función de costo promedio $Q(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Si se toma una función característica de costo promedio ésta podría ser:



Dicha función tiene un punto crítico, si se localiza este punto se tendrá el costo mínimo.

Al derivar $Q(x)$ se obtiene:

$$Q'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$$

Se iguala con cero $Q'(x)$, para obtener el valor $C'(x)$

$$\frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} = 0$$

$$xC'(x) - C(x) = 0$$

$$xC'(x) = C(x)$$

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Pero $Q(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, entonces, $C'(x) = Q(x)$

Es decir, cuando el costo promedio es mínimo se tiene que es igual al costo marginal. Lo anterior conlleva al hecho de que si el costo marginal es menor que el costo promedio, entonces se debe producir más para disminuir el costo promedio y viceversa, si el costo marginal es mayor que el costo promedio se tendrá que producir menos para que el costo promedio baje.

2 El costo (en pesos) estimado para producir x artículos está dado por la función:

$$C(x) = 0.002x^2 + 2x + 3\,000$$

Determina el costo promedio y el costo marginal de producir 1 200 artículos y calcula el nivel de producción para el cual el costo promedio es el más bajo y cuál es dicho costo.

Solución

El costo promedio está dado por la fórmula $Q(x) = \frac{C(x)}{x}$, entonces:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0.002x^2 + 2x + 3\,000}{x} \quad \rightarrow \quad Q(x) = 0.002x + 2 + \frac{3\,000}{x}$$

Se evalúa $x = 1\,200$

$$Q(1\,200) = 0.002(1\,200) + 2 + \frac{3\,000}{1\,200}$$

Por tanto, el costo promedio de producir 1 200 artículos es de \$6.90

Para obtener el costo marginal se determina $C'(x)$ y se evalúa $x = 1\,200$

$$C'(x) = 0.004x + 2$$

$$C'(1\,200) = 0.004(1\,200) + 2 = 6.8$$

Por tanto, el costo marginal de producir 1 200 artículos es de \$6.80

El costo promedio se minimiza cuando es igual al costo marginal.

$$C'(x) = Q(x) \quad \rightarrow \quad 0.004x + 2 = 0.002x + 2 + \frac{3\,000}{x} \quad \rightarrow \quad 0.004x = 0.002x + \frac{3\,000}{x}$$

$$\rightarrow \quad 0.002x = \frac{3\,000}{x} \quad \rightarrow \quad 0.002x^2 = 300$$

$$x^2 = \frac{3\,000}{0.002}$$

$$x = \sqrt{\frac{3\,000}{0.002}} \approx 1\,225$$

Para mostrar que $x = 1\,225$, se obtiene un mínimo, se determina $Q''(x)$ y se evalúa:

$$Q(x) = 0.002x + 2 + \frac{3\,000}{x} \quad \rightarrow \quad Q'(x) = 0.002 - \frac{3\,000}{x^2}$$

$$Q''(x) = \frac{6\,000}{x^3}$$

$$Q''(1225) = \frac{3\,000}{(1\,225)^3} > 0$$

Por tanto, para $x = 1\,225$ hay un mínimo.

El costo promedio se obtiene evaluando $x = 1\,225$ en $Q(x)$.

$$Q(x) = 0.002x + 2 + \frac{3\,000}{x} \qquad Q(1\,225) = 0.002(1\,225) + 2 + \frac{3\,000}{1\,225} = 6.89$$

Finalmente, el costo promedio mínimo por artículo es de \$6.89 ≈ \$7.00

De la misma forma existen funciones marginales para el ingreso y la utilidad, en los dos casos es la derivada de cada función.

$$\text{Ingreso marginal} = I'(x)$$

$$\text{Utilidad marginal} = U'(x)$$

Ejemplo

Una empresa estima su ingreso y costo (en pesos) con las funciones $I(x) = -2x^2 + 340x$ y $C(x) = 3x^2 + 6\,000$, respectivamente. Determina el ingreso obtenido al producir la vigésima primera unidad y aproxima dicho valor con el ingreso marginal.

Solución

Se evalúan $x = 20$ y $x = 21$ en la función de ingresos:

$$I(20) = -2(20)^2 + 340(20) = 6\,000$$

$$I(21) = -2(21)^2 + 340(21) = 6\,258$$

El valor de la vigésima primera unidad es:

$$I(21) - I(20) = 6\,258 - 6\,000 = 258$$

Si se obtiene con el concepto ingreso marginal, se deriva $I(x)$ y se evalúa $x = 20$

$$I'(x) = -4x + 340$$

$$I'(20) = -4(20) + 340 = 260$$

En el comparativo se observa que el ingreso marginal da un valor muy aproximado a 258 que es el ingreso real de la vigésima unidad.

EJERCICIO **46**

1. Dadas las funciones de ingreso y costo, $I(x)$ y $C(x)$ respectivamente, determina el ingreso máximo, la utilidad máxima y el costo medio mínimo:

   a) $I(x) = -x^2 + 300x$ y $C(x) = x^2 + 40x + 80$

   b) $I(x) = x(400 - 4x)$ y $C(x) = x^2 + 20x + 12$

Resuelve los siguientes problemas:

2. El costo estimado para producir x artículos está dado por la función:

   $$C(x) = 0.004x^2 + 5x + 6\,000$$

   Determina el costo promedio y el costo marginal de producir 2 000 artículos y calcula el nivel de producción para el cual el costo promedio es el más bajo y cuál es dicho costo.
3. Una empresa estima su ingreso y costo con las funciones $I(x) = -4x^2 + 400x$ y $C(x) = 2x^2 + 300$ respectivamente. Determina el ingreso obtenido al producir la trigésima primera unidad y aproxima dicho valor con el ingreso marginal.
4. Una empresa de telas estima que el costo para producir x metros de tela es $C(x) = 0.001x^3 - 0.2x^2 + 24x + 2\,400$ y que al vender x metros cobraría $p(x) = 58 - 0.00042x$ por metro. Determina el nivel de producción para obtener una utilidad máxima.
   Ingreso sugerido: $I(x) = p(x) \cdot x$
5. Un estadio de futbol tiene una capacidad para 60 000 espectadores. El promedio de asistencia fue de 32 000 espectadores, teniendo los boletos un costo de $60.00 por persona, la gerencia decide bajar el precio por boleto a $40.00, teniendo un promedio de 48 000 espectadores. Determina la función lineal de demanda $p(x)$ y calcula el precio por boleto para minimizar el ingreso.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables con $g'(x) \neq 0$ cerca de a (incluso en a)

Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

o

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

y para $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

A esto le llamamos regla de L'Hôpital, la cual nos dice que el límite de un cociente de dos funciones es igual al límite del cociente de las derivadas de dichas funciones.

Esta regla es válida para los límites laterales ($x \to a^+$ o $x \to a^-$) y los límites al infinito ($x \to \infty$ o $x \to -\infty$)

- **Indeterminación $\frac{0}{0}$**

Ejemplo

Obtén $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

Solución

Al evaluar se obtiene la indeterminación $\frac{0}{0}$ y utilizando la regla se obtiene:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{d}{dx}(x^2-9)}{\frac{d}{dx}(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x}{1} = \frac{2(3)}{1} = 6$$

- **Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$**

Ejemplo

¿Cuál es el valor de $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{e^{x-1}}$?

Solución

Al evaluar se obtiene $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica la regla y se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{e^{x-1}} = \frac{3}{\infty} = 0$$

- **Indeterminación $0 \cdot \infty$**

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, para $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ tenemos una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Entonces podemos utilizar la regla de L'Hôpital transformando el producto de la siguiente forma

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{o} \quad f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Ejemplo

Determina $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

Solución

Al evaluar se obtiene

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^2 \cdot \lim_{x\to 0^+} \ln x = 0\cdot(-\infty)$$

Para resolver el límite, se escribe

$$x^2 \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$

de tal forma que:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}\ ;\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^3}{2x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

Ejemplo

Obtén la solución de $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\tan x$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\tan x = \left(\frac{1}{0}\right)(\tan(0)) = \infty\cdot 0$$

Al aplicar la regla:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\tan x = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1} = \frac{\sec^2 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

- **Indeterminación: $\infty - \infty$**

Cuando se obtienen diferencias indeterminadas del tipo $\infty - \infty$ para $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x))$, siendo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, se utiliza la regla de L'Hôpital transformando (si es posible) la diferencia a un cociente.

Ejemplo

Calcula el resultado del $\lim\limits_{x\to 0}\left(\text{ctg}\, x - \frac{1}{x}\right)$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\left(\text{ctg}\, x - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty$$

Se aplica la regla y se calcula el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\,\text{sen}\, x + \cos x - \cos x}{x\cos x + \text{sen}\, x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\,\text{sen}\, x}{x\cos x + \text{sen}\, x}\right) = \frac{-0\,\text{sen}\, 0}{0\cos 0 + \text{sen}\, 0} = \frac{0}{0}$$

Se observa que el resultado es $\frac{0}{0}$, por consiguiente, se utiliza de nuevo la regla:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\cos x-\operatorname{sen} x}{2\cos x-x\operatorname{sen} x}\right)$$

Al evaluar nuevamente se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\cos x-\operatorname{sen} x}{2\cos x-x\operatorname{sen} x}\right)=\frac{-0\cos 0-\operatorname{sen} 0}{2\cos 0-0\operatorname{sen} 0}=\frac{0}{2}=0\text{ , entonces, }\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right]=0$$

- **Indeterminaciones del tipo 0°, ∞° y 1^∞**

Para $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ se pueden obtener las siguientes formas indeterminadas:

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ entonces se obtiene una indeterminación del tipo 0°
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ entonces se obtiene una indeterminación del tipo ∞°
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ se obtiene una indeterminación del tipo 1^∞

Para estos casos se puede aplicar el logaritmo natural en $y=[f(x)]^{g(x)}$ y aplicar la propiedad $\ln b^n = n\ln b$, es decir:

Sea $y=[f(x)]^{g(x)}$ entonces:

$$\ln y=\ln[f(x)]^{g(x)}$$

$$\ln y=g(x)\ln f(x)$$

De tal forma que esta transformación nos lleva a un producto indeterminado $g(x)\ln f(x)$ el cual es del tipo $0\cdot\infty$

Por otro lado también se puede utilizar la transformación: $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$

Ejemplo

Obtén el resultado de $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^x$

Solución

Al resolver directamente

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^x=0^0$$

se obtiene la indeterminación 0° sea $y=(\cot x)^x$, aplicando el logaritmo natural en ambos lados se obtiene

$$\ln y=\ln(\cot x)^x$$

Aplicamos la propiedad $\ln b^n = n\ln b$ y se tiene:

$$\ln y = x\ln\cot x$$

Calculamos el límite para $\ln y$ y se transforma el producto

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}x\ln\cot x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\frac{1}{x}}$$

Se aplica la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \cot x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{\cot x}\right)(-\csc^2 x)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\tan x)\left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{0}{0}$$

Se obtiene la indeterminación $\frac{0}{0}$, entonces se utiliza la identidad $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x \cos x$ y se aplica L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{4x}{2\cos 2x} = \frac{4(0)}{2\cos 2(0)} = \frac{0}{2\cos 0} = \frac{0}{2} = 0$$

por tanto $\lim_{x\to 0^+} \ln y = 0$

Pero queremos el límite de y, entonces partiendo de la propiedad $e^{\ln b} = b$ se escribe $y = e^{\ln y}$

Entonces

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^x = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1$$

Por tanto $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^x = 1$

Ejemplo

¿Cuál es el resultado de $\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{\tan x}$?

Solución

Sea $y = (1-\cos x)^{\tan x}$, aplicando logaritmo natural en ambos lados se obtiene:

$$\ln y = \ln(1-\cos x)^{\tan x}$$

$$\ln y = (\tan x)\ln(1-\cos x)$$

$$\ln y = \frac{1}{\cot x}\ln(1-\cos x)$$

$$\ln y = \frac{\ln(1-\cos x)}{\cot x}$$

Aplicando el límite y luego la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\cos x)}{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{1-\cos x}\right)(\operatorname{sen} x)}{-\csc^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[-\frac{(1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[-\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} [-(1+\cos x)\operatorname{sen} x] = -(1+\cos(0))\operatorname{sen}(0)$$

$$= -(1+1)(0) = -(2)(0) = 0$$

Por tanto $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = 0$ pero se quiere el límite de y, entonces sea $y = e^{\ln y}$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1$$

por tanto $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{\tan x} = 1$

Ejemplo

Determina $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$

Solución

Al sustituir directamente se obtiene:

$$\lim_{x\to 0^+} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$$

sea $y = (1-2x)^{\frac{1}{x}}$, al aplicar logaritmo natural

$$\ln y = \ln(1-2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln(1-2x)$$

$$\ln y = \frac{\ln(1-2x)}{x}$$

Se obtiene el límite de $\ln y$ y se aplica L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-2x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{2}{1-2x}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \left[-\frac{2}{1-2x}\right] = -\frac{2}{1-2(0)} = -\frac{2}{1} = -2$$

Por tanto $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = -2$

Para calcular el límite de y hacemos $y = e^{\ln y}$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0^+}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^2}$$

EJERCICIO 47

Obtén los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-125}{x^2-25}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(3-x)}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^x}{3x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\tan x)^x$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{2x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(\sec x)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}(x\csc 3x)$
9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos x+\operatorname{sen} x)^{\tan x}$
10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(2x+1)-\ln(x+2)}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x+\ln x}{2x-\ln x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\operatorname{sen} 2x-1}{\ln(1+2x)}$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen} 3x}\right)$
15. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-x}{x^3}\right)$
17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan x$
18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)\ln\left(\dfrac{3x+2}{x+2}\right)$
19. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$
20. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\sec x-\tan x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teorema de Rolle

Definición

Sea $f(x)$ una función que satisface las siguientes condiciones:

1. Es continua en el intervalo $[a, b]$.
2. Es derivable en el intervalo (a, b).
3. $f(a) = f(b) = 0$
4. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica el teorema de Rolle para la función $f(x) = x^2 - x - 6$ en el intervalo $[-2, 3]$ y determina el valor de c en dicho intervalo.

Solución

1. $f(x)$ es una función polinomial, por tanto, es continua en todos los números reales, en particular en el intervalo $[-2, 3]$
2. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 2x - 1$; $f'(x)$ es definida en los números reales, en particular está definida en el intervalo $(-2, 3)$ y es continua.
3. $f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$; $f(3) = (3)^2 - (3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$
4. Por tanto, $f(x)$ satisface el teorema de Rolle.

Para obtener el valor de c se emplea:

$$f'(c) = 0 \quad \rightarrow \quad 2c - 1 = 0$$

Se resuelve la última ecuación y se obtiene:

$$c = \frac{1}{2} \text{ y } \frac{1}{2} \in (-2, 3)$$

2 Verifica si la función $f(x)=x^3-5x^2+2x+8$ satisface el teorema de Rolle en los intervalos $[-1, 2]$, $[2, 5]$ y encuentra los respectivos valores de c en estos intervalos.

Solución

1. $f(x)$ es una función polinomial, por tanto, es continua en toda la recta real y en consecuencia es continua en los intervalos propuestos.
2. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$; esta función es continua en los intervalos $(-1, 2)$ y $(2, 5)$ por ser una función polinomial.
3. Para el intervalo $[-1, 2]$

   $f(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 + 2(-1) + 8 = -1 - 5 - 2 + 8 = 0$

   $f(2) = (2)^3 - 5(2)^2 + 2(2) + 8 = 8 - 20 + 4 + 8 = 0$

   $f(-1) = f(2)$

   El teorema de Rolle se cumple para este intervalo.
   Para el intervalo $[2, 5]$

   $f(2) = 0$

   $f(5) = (5)^3 - 5(5)^2 + 2(5) + 8 = 125 - 125 + 10 + 8 = 18$

   $f(2) \neq f(5)$

   En este intervalo no se satisface el teorema de Rolle.
4. Se buscan los valores posibles de c en el intervalo $[-1, 2]$:

$$f'(c) = 0 \quad \rightarrow \quad 3c^2 - 10c + 2 = 0$$

Se resuelve la ecuación cuadrática para obtener los valores de c,

$$\begin{aligned} c &= \frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4(3)(2)}}{2(3)} \\ &= \frac{10\pm\sqrt{100-24}}{6} \\ &= \frac{10\pm\sqrt{76}}{6} \\ &= \frac{10\pm 8.717}{6} \end{aligned}$$

$$c = 3.119$$

$$c = 0.213$$

EJERCICIO 48

Verifica el teorema de Rolle en los intervalos indicados y halla los posibles valores de c para las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2 - 4$; $[-2, 2]$
2. $f(x) = 2x^2 - 3x$; $\left[0, \frac{3}{2}\right]$
3. $f(x) = x^2 - 5x + 6$; $[2, 3]$

4. $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$; $\left[-3, -\frac{1}{2}\right]$ y $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

5. $f(x) = x^3 - 9x$; $[-3,0]$ y $[0,2]$

6. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$; $[-2, 2]$

7. $f(x) = x^3 - 13x + 12$; $[-4,1]$ y $[1,3]$

8. $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$; $[-5,0]$, $[-5,5]$ y $[0,5]$

9. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^4 + 1}$; $[-2,0]$, $[-2,2]$ y $[0,2]$

10. $f(x) = \cos x$; $[-\pi, \pi]$ y $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

11. $g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ 8 - 5x & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $\left[-2, \frac{8}{3}\right]$

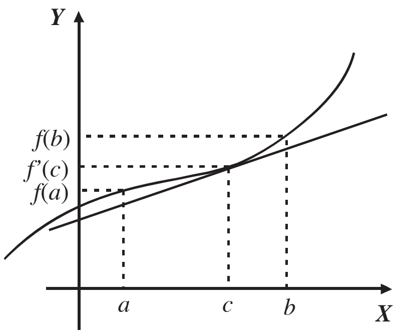
12. $h(x) = x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}}$; $[0,16]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teorema del valor medio

Dada una función $f(x)$ tal que:

1. $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$
2. $f(x)$ es diferenciable en el intervalo (a, b)
3. Entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica que la función $f(x) = x^2 - 4$ satisfaga el teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 3]$ y encuentra el valor de c.

Solución

1. $f(x)$ es continua en $[-1, 3]$, ya que está definida en todos los puntos de este intervalo.
2. Como $f(x)$ es una función polinomial, entonces es continua y diferenciable en el intervalo $(-1, 3)$, $f'(x) = 2x$
3. Para buscar a c se sustituye en la fórmula:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)}$$

$$2c = \frac{5 - (-3)}{4}$$

$$c = \frac{8}{8} = 1$$

Por tanto, el valor de c es igual a 1.

2 Verifica si la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ satisface el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y calcula el valor de c.

Solución

1. $f(x)$ es una función polinomial, entonces $f(x)$ es continua en todos los puntos del intervalo $[0, 2]$
2. Al ser $f(x)$ continua en el intervalo $[0, 2]$ entonces es derivable en el intervalo $(0, 2)$ y $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$, aplicando el teorema del valor medio se obtiene el valor de c.

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \quad \rightarrow \quad 3c^2 + 2c - 2 = \frac{8 - 0}{2}$$

$$3c^2 + 2c - 2 = 4$$

$$3c^2 + 2c - 6 = 0$$

Al resolver la ecuación para c:

$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(3)(-6)}}{2(3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} = \begin{cases} c = 1.12 \\ c = -1.78 \end{cases}$$

El valor de c que pertenece al intervalo $(0, 2)$ es $c = 1.12$

3 Verifica si la función $f(x) = x^2 + 5x + 4$, satisface el teorema del valor medio en el intervalo [1, 3] y determina el valor de c.

Solución

1. La función es continua en el intervalo [1, 3], ya que está definida en todos los puntos del intervalo.
2. La función es polinomial y continua en el intervalo [1, 3] entonces, es diferenciable en ese intervalo $f'(x) = 2x + 5$
3. Para encontrar c se aplica la fórmula: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$2c + 5 = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}; \qquad 2c + 5 = \frac{28 - 10}{3 - 1}$$

$$2c + 5 = 9$$

$$2c = 4$$

$$c = 2$$

EJERCICIO 49

Verifica el teorema del valor medio para las siguientes funciones en los intervalos indicados y determina el valor adecuado de c.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$; [0, 3]
2. $f(x) = 4 + x^2$; [−1, 2]
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; [1, 3]
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$; [−2, 1]
5. $f(x) = \sqrt{x+1}$; [0, 8]
6. $f(x) = x^3 + 5x$; [−2, 1]
7. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$; $[-\pi, \pi]$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$; [0, 7]
9. $f(x) = e^x$; [0, 1]
10. $f(x) = \ln(2x + 1)$; [0, 4]

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Diferenciales

Se define la diferencial de una función f en un punto x, como el producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente y se denota por las expresiones $df(x)$ o dy, es decir:

$$df(x) = f'(x)dx \text{ o } dy = \frac{dy}{dx}dx \text{ ; para toda } dx \neq 0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la diferencial de la función $y = x^2 - 5x + 6$

Solución

Se obtiene la derivada y se multiplica por dx:

$$dy = \frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 6) \cdot dx$$

$$dy = (2x - 5)dx$$

Por tanto, la diferencial es: $dy = (2x - 5)dx$

2 Determina la diferencial de la función $y = \sqrt{x^2 - 5}$

Solución

Se deriva la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{x^2 - 5}}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 5)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d(x^2 - 5)}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 5)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

Por consiguiente,

$$dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}\, dx$$

3 Obtén la diferencial de la función $f(\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

Solución

Se deriva la función:

$$\begin{aligned} \frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{d2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{d\theta} &= 2\left[\operatorname{sen} \theta \frac{d \cos \theta}{d\theta} + \cos \theta \frac{d \operatorname{sen} \theta}{d\theta}\right] \\ &= 2[\operatorname{sen} \theta(-\operatorname{sen} \theta) + \cos \theta(\cos \theta)] \\ &= 2[\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta] \end{aligned}$$

Pero $\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos 2\theta$, entonces:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = 2 \cos 2\theta$$

Entonces

$$df(\theta) = 2 \cos 2\theta \, d\theta$$

4 Obtén la diferencial de la función $y = \text{arc sen}(1 - x^2)$

Solución

Se deriva la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{arc sen}(1 - x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}\frac{d}{dx}(1 - x^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x^2+x^4)}}(-2x)$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$$

$$= \frac{-2x}{x\sqrt{2-x^2}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

Por consiguiente, $dy = -\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

EJERCICIO 50

Determina la diferencial de las siguientes funciones:

1. $y = ax$
2. $y = ax^2 + bx + c$
3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
4. $s = \sqrt{t} - \sqrt[3]{t}$
5. $h(t) = (5 - 3t^2)^6$
6. $y = (x^2 - 2)^{-3}$
7. $y = \left(2 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$
8. $y = x\sqrt{x^2+2}$
9. $f(x) = (x - 1)^3(x + 3)^4$
10. $h(s) = \frac{2s-1}{2s+3}$
11. $g(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$
12. $y = \frac{x-2}{\sqrt{x+3}}$
13. $y = \sqrt{\frac{ax^2+b}{ax^2-b}}$
14. $f(x) = x - \cos 2x$
15. $f(t) = \tan^3 2t$
16. $y = (1 - \sec x)^2$
17. $g(x) = \frac{1-\text{sen}\,x}{1+\text{sen}\,x}$
18. $s(t) = \frac{\sqrt{\cos t}}{t}$
19. $f(x) = \sqrt{\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}}$
20. $y = \log(x^2 + 5)$

21. $y = \ln\sqrt{x^2 - 3}$

22. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

23. $y = e^{\sqrt{x^3}}$

24. $y = 2^{x^3+5}$

25. $h(t) = \dfrac{e^t}{e^t - e^{-t}}$

26. $f(x) = x^2 \ln x$

27. $f(x) = \text{arc cos } 2x$

28. $y = \text{arc tan}\dfrac{2}{x}$

29. $y = \text{arc sec }\sqrt{x}$

30. $y = \text{arc csc}(3x^3)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicaciones de la diferencial

Sea $y = f(x)$ una función, si se da a x un incremento Δx, la variable y recibe un incremento Δy, que se considera un valor muy próximo a dy, entonces el valor aproximado de $f(x + \Delta x)$ es:

$$f(x + \Delta x) \approx y + \Delta y \approx y + f'(x)dx \approx y + dy$$

A esta expresión se le llama aproximación lineal y sirve para aproximar valores de funciones.

Aproximación lineal

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el valor aproximado de $\sqrt{25.020}$

Solución

Se asocia a la operación la siguiente función:

$$y = \sqrt{x}$$

Se busca un valor x próximo a 25.020, cuya raíz cuadrada sea exacta, en este caso $x = 25$, $y = \sqrt{25} = 5$; las veinte milésimas restantes se toman como la diferencial de la variable x.

$$dx = 0.020 = \frac{1}{50}$$

Se obtiene su diferencial:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{25}}\left(\frac{1}{50}\right) = \frac{1}{500}$$

$$dy = \frac{1}{500}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$\sqrt{25.020} = \sqrt{25 + 0.02} \approx 5 + \frac{1}{500} \cong \frac{2501}{500} = 5.002$$

Por consiguiente, $\sqrt{25.020} \approx 5.002$

2 Determina el valor aproximado de $\sqrt[3]{70}$

Solución

Se asocia a la operación la siguiente función:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

Se busca un valor x próximo a 70, cuya raíz cúbica sea exacta, en este caso $x = 64$, y las seis unidades restantes son tomadas como la diferencial de la variable x, es decir, $dx = 6$

Se obtiene la diferencial:

$$dy = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$$

$$dy = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{64}\right)^2}(6) = \frac{1}{8}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$\sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{(64+6)} \approx 4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8}$$

Por tanto, $\sqrt[3]{64} \approx \frac{33}{8} = 4.125$

3 Obtén el valor aproximado de cos 40°

Solución

La función asociada a la operación es:

$$y = \cos x$$

Se busca un valor x próximo a 40°, en este caso $x = 30° = \frac{\pi}{6}$, $y = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y los $10° = \frac{\pi}{18}$ restantes es el valor de la diferencial de x.

$$dx = \frac{\pi}{18}$$

Se obtiene su diferencial:

$$dy = -\operatorname{sen} x\, dx$$

$$dy = (-\operatorname{sen} 30°)\left(\frac{\pi}{18}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{18}\right)$$

$$dy = -\frac{\pi}{36}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$\cos 40° \approx \cos(30° + 10°) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{36} = \frac{18\sqrt{3} - \pi}{36} = 0.778758941$$

Finalmente, $\cos 40° \approx \frac{18\sqrt{3} - \pi}{36}$

Aproximación del aumento o disminución de funciones

Ejemplo

Al enfriar una placa cuadrada metálica de 8 cm de longitud, su lado disminuye un 0.03%. ¿Cuánto disminuirá porcentualmente su área?

Solución

Se determina cuánto disminuyó el lado de la placa, para ello se obtiene el 0.03% de 8.

$$(8)(0.0003) = 0.0024$$

Si x = lado de la placa, entonces $dx = -0.0024$ cm, el signo menos indica que decrece el lado.
Luego:
El área de la placa es:

$$A = x^2$$

La disminución en el área es:

$$dA = 2x\,dx$$

$$dA = 2(8\text{ cm})(-0.0024\text{ cm}) = -0.0384\text{ cm}^2$$

Por último, se determina qué porcentaje representa 0.0384 del área total de la placa, es decir:

$$A = x^2 = (8\text{ cm})^2 = 64\text{ cm}^2$$

$$\text{Porcentaje de la disminución de su área} = \frac{(0.0384\text{ cm}^2)(100\%)}{64\text{ cm}^2} = 0.06\%$$

Por lo tanto, el área disminuye 0.06%

Estimación de errores de magnitudes

Ejemplo

Se calculó la longitud del lado de un cuadrado y éste mide 2.5 cm, con un error de 0.02 cm. Determina el máximo error que se comete al medir el área del cuadrado.

Solución

El área se determina con la fórmula $A = x^2$, se obtiene la diferencial $dA = 2x\,dx$, al sustituir se obtiene $dA = 2(2.5\text{ cm})(0.02\text{ cm}) = 0.1\text{ cm}^2$; dA representa el máximo error cometido en la medición del área.

➲ **Error relativo y error porcentual.**

$$\text{error relativo} = \frac{dv}{v}\text{; error porcentual} = 100\frac{dv}{v}$$

Ejemplo

Se calculó el radio de una esfera y éste mide 4.5 cm con un error máximo de 0.035 cm. Calcula el error relativo y porcentual que se obtiene al medir el volumen.

Solución

Del problema se obtiene:

$$r = 4.5\text{ cm} \quad \rightarrow \quad dr = 0.035\text{ cm}$$

La fórmula del volumen es $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ y su diferencial es $dv = 4\pi r^2 dr$

Entonces, el error máximo cometido al medir el volumen es:

$$dv = 4\pi r^2 dr = 4\pi(4.5\text{ cm})^2(0.035\text{ cm})$$

$$dv = 2.835\pi\text{ cm}^3$$

Luego, el volumen de la esfera con radio 4.5 cm es:

$$v = \frac{4}{3}\pi(4.5\text{ cm})^3 = 121.5\pi\text{ cm}^3$$

Por tanto, el error relativo es:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2.835\pi\text{ cm}^3}{121.5\pi\text{ cm}^3} \rightarrow \frac{dv}{v} = 0.02\overline{3}$$

Y el error porcentual:

$$100\frac{dv}{v} = 100(0.02\overline{3}) \rightarrow 100\frac{dv}{v} = 2.\overline{3}\%$$

EJERCICIO 51

Calcula el valor más aproximado de las siguientes operaciones:

1. $\sqrt{86}$
2. $\sqrt[3]{35}$
3. $\sqrt[4]{20}$
4. sen 38°
5. $\sqrt{6} + \cos 50°$
6. $\sqrt[3]{130} + 2\tan 63°$
7. $(123.5)^{\frac{3}{2}}$
8. sen 53° − cos 44°
9. $\text{sen}^4\, 29°$
10. cot 75°
11. Una placa circular de radio 3.8 cm, se introduce en un horno, aumentando su radio en 0.012 cm. ¿Cuál es el aumento en la superficie de la placa?
12. La longitud de las aristas de un cubo es de 5.9 cm cada una, se midieron con un error máximo de 0.032 cm. Determina el máximo error que se cometió al medir su superficie y volumen.
13. Se calculó el diámetro de la base de un cilindro circular y éste midió 7.2 cm, con un error máximo de 0.05 cm. Calcula el error máximo que se cometió al medir el volumen si la altura es constante e igual a 10 cm.
14. Se midió un lado de un cuadrado y se cometió un error máximo de 0.012 cm. Calcula la longitud de uno de sus lados si el error máximo que se cometió al medir su área es de 0.192 cm^2.
15. Calcula el error relativo y porcentual que se comete al medir el volumen y la superficie de una esfera, si su radio mide 12 cm y el error máximo que se cometió al medirlo es de 0.015 cm.
16. El error relativo que se comete al medir el área de un cuadrado es de 0.18, si el error que se comete al medir la longitud de uno de sus lados es de 0.01 cm. Encuentra la longitud de cada uno de los lados del cuadrado.
17. El error relativo al medir el volumen de una esfera es de 0.02. Calcula el error máximo cometido al medir su diámetro, si éste mide 3 cm.
18. Calcula el error relativo y porcentual que se comete al medir el área lateral de un cilindro de base circular, si al medir el diámetro de la base se obtiene 4.5 cm con un error máximo de 0.004 cm y la altura es de 5.6 cm.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Cálculo integral

CAPÍTULO 6

SUMAS

Reseña HISTÓRICA

Nació en Breselenz, una aldea cercana a Dannenberg en el reino de Hannover, actualmente parte de Alemania.

Fue un matemático que realizó contribuciones muy importantes en análisis y geometría diferencial, algunas de ellas allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

Los escritos de Riemann de 1854 llegaron a ser un clásico en las matemáticas y estos resultados se incorporaron a la teoría de la relatividad y gravitación de Einstein. La cátedra de Gauss en Gottingen fue ocupada por Dirichlet en el año 1855 y después de su muerte por Riemann. En esos tiempos sufrió de tuberculosis y estuvo sus últimos años en Italia en un intento por mejorar su salud.

George Friedrich Bernhard Riemann
(1826-1866)

Definición

La suma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

se representa con el símbolo sigma $\sum$, de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Ejemplo

Determina $\sum_{i=1}^{5} i^2$

Solución

Se sustituye i por los valores de 1 a 5, se eleva cada uno de ellos al cuadrado y se suman los resultados:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

De manera que, $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 55$

Propiedades

1. $\sum_{i=a}^{n} k = (n - a + 1)k$

2. $\sum_{i=a}^{n} \left[f(i) + g(i) \right] = \sum_{i=a}^{n} f(i) + \sum_{i=a}^{n} g(i)$

3. $\sum_{i=a}^{n} c\, f(i) = c \sum_{i=a}^{n} f(i)$

4. $\sum_{i=1}^{n} \left[f(i) - f(i-1) \right] = f(n) - f(0)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\sum_{i=3}^{7} 8$

Solución

Al aplicar la propiedad correspondiente a una constante, se obtiene:

$$\sum_{i=3}^{7} 8 = (7 - 3 + 1)8 = 40$$

2 Precisa el valor de $\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 3i)$

Solución

Se aplican las propiedades de las sumas y se determina que:

$$\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 3i) = \sum_{i=1}^{4} i^2 + \sum_{i=1}^{4} 3i = \sum_{i=1}^{4} i^2 + 3\sum_{i=1}^{4} i$$

Se desarrollan,

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 = 30;\ 3\sum_{i=1}^{4} i = 3\,(1 + 2 + 3 + 4) = 3(10) = 30$$

Finalmente tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 3i) = 30 + 30 = 60$$

3 Calcula el valor de $\sum_{n=0}^{5}\left(2n^3-\frac{2}{3}n+7\right)$

Solución

Al aplicar las propiedades de las sumas, se determina:

$$\sum_{n=0}^{5}\left(2n^3-\frac{2}{3}n+7\right) = \sum_{n=0}^{5}2n^3-\sum_{n=0}^{5}\frac{2}{3}n+\sum_{n=0}^{5}7 = 2\sum_{n=0}^{5}n^3-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{5}n+\sum_{n=0}^{5}7$$

Se desarrollan las sumas,

$$2\sum_{n=0}^{5}n^3 = 2[(0)^3+(1)^3+(2)^3+(3)^3+(4)^3+(5)^3] = 450;$$

$$-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{5}n = -\frac{2}{3}(0+1+2+3+4+5) = -\frac{2}{3}(15) = -10;$$

$$\sum_{n=0}^{5}7 = 7(5-0+1) = 7(6) = 42$$

Por tanto, se precisa que:

$$\sum_{n=0}^{5}\left(2n^3-\frac{2}{3}n+7\right) = 450-10+42 = 482$$

4 Determina el valor de $\sum_{i=6}^{8}(3ai^2+12bi-3c)$

Solución

Al aplicar las propiedades de las sumas se encuentra que:

$$\sum_{i=6}^{8}(3ai^2+12bi-3c) = \sum_{i=6}^{8}3ai^2+\sum_{i=6}^{8}12b\,i-\sum_{i=6}^{8}3c = 3a\sum_{i=6}^{8}i^2+12b\sum_{i=6}^{8}i-\sum_{i=6}^{8}3c$$

Se desarrollan las sumas,

$$3a\sum_{i=6}^{8}i^2 = (3a)[(6)^2+(7)^2+(8)^2] = (3a)(149) = 447a;$$

$$12b\sum_{i=6}^{8}i = (12b)(6+7+8) = (12b)(21) = 252b;\quad \sum_{i=6}^{8}3c = (3c)(8-6+1) = (3c)(3) = 9c$$

Finalmente el resultado es:

$$\sum_{i=6}^{8}(3ai^2+12bi-3c) = 447a+252b-9c$$

EJERCICIO 1

Realiza las siguientes sumas:

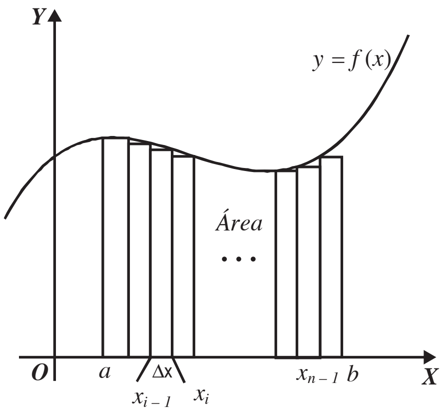
1. $\sum_{i=1}^{4} i^4$
2. $\sum_{i=2}^{6} (4-3i)$
3. $\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{2-i}{4}\right)$
4. $\sum_{n=3}^{8} \left(\frac{2}{n-1}\right)$
5. $\sum_{i=1}^{7} (3i-2)^3$
6. $\sum_{n=2}^{4} (n^2-4)$
7. $\sum_{i=4}^{10} \left(\frac{i-i^2}{3}\right)$
8. $\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{ai+b}{2a}\right)$
9. $\sum_{n=2}^{4} (3n^2-5n+7)$
10. $\sum_{n=1}^{5} \frac{n(n+1)}{n+2}$
11. $\sum_{n=3}^{6} (n^3-n)$
12. $\sum_{i=1}^{9} \left(i^2-(i-1)^2\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma de Riemann (rectángulos inscritos y circunscritos)

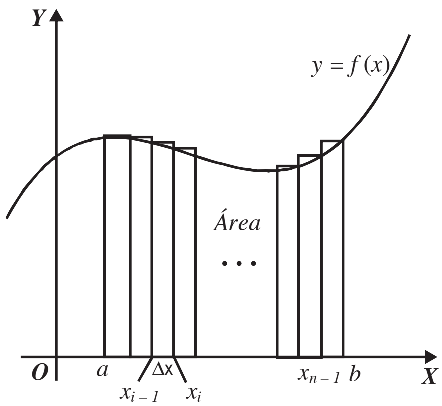
Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$ el área A bajo la gráfica de $f(x)$ en el intervalo dado, se obtiene realizando estimaciones con rectángulos inscritos o circunscritos como se ilustra.

Rectángulos inscritos
sumas inferiores



$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a+(i-1)\Delta x)$$

Rectángulos circunscritos
sumas superiores



$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a+i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Sumas básicas

1. $\sum_{i=1}^{n} k = kn$

2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

5. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$

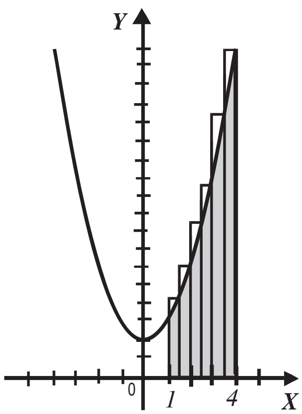
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + 2$ y el eje x en el intervalo $[1, 4]$. Utiliza sumas superiores.

Solución

Gráfica



Se sustituye en la fórmula $A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$

Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$a + i\Delta x = 1 + i\left(\frac{3}{n}\right) = 1 + \frac{3i}{n}$$

$$f(a + i\Delta x) = f\left(1+\frac{3i}{n}\right) = \left(1+\frac{3i}{n}\right)^2 + 2$$

$$= \frac{9i^2}{n^2} + \frac{6i}{n} + 3$$

Por consiguiente,

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left(\frac{9i^2}{n^2}+\frac{6i}{n}+3\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27i^2}{n^3}+\frac{18i}{n^2}+\frac{9}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{27i^2}{n^3}+\sum_{i=1}^{n}\frac{18i}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{9}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right)$$

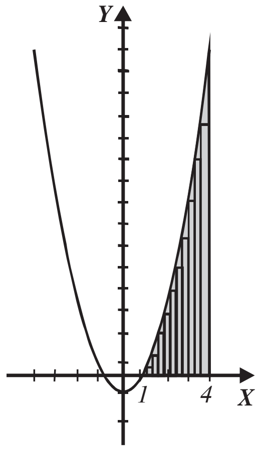
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\frac{18}{n^2}\cdot\frac{n^2+n}{2}+\frac{9}{n}\cdot n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(27+\frac{45}{2n}+\frac{9}{2n^2}\right) = 27u^2$$

Finalmente, el área es $A = 27u^2$

2 Aplica sumas inferiores para encontrar el área limitada por la curva $f(x) = x^2 - 1$ y el eje x en el intervalo [1, 4]

Solución



Se aplica la fórmula

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a + (i-1)\Delta x)$$

Donde:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$a + (i-1)\Delta x = 1 + (i-1)\frac{3}{n} = \frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1$$

$$f(a + (i-1)\Delta x) = f\left(\frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1\right) = \left(\frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1\right)^2 - 1$$

$$= \frac{9i^2}{n^2} + i\left(\frac{6}{n} - \frac{18}{n^2}\right) + \frac{9}{n^2} - \frac{6}{n}$$

Al sustituir en la fórmula se obtiene:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{9}{n^2}i^2 + \left(\frac{6}{n} - \frac{18}{n^2}\right)i + \frac{9}{n^2} - \frac{6}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27}{n^3}i^2 + \left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)i + \frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{27}{n^3}i^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)i + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 + \left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n}i + \left(\frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n}1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + \left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + n\left(\frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} + 9 + \frac{9}{n} - \frac{27}{n} - \frac{27}{n^2} + \frac{27}{n^2} - \frac{18}{n}\right]$$

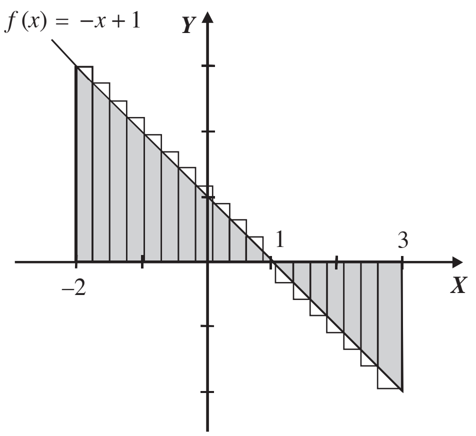
$$= \lim_{n\to\infty}\left[18 - \frac{45}{2n} + \frac{9}{2n^2}\right] = 18u^2$$

Por tanto, $A = 18u^2$

3 Determina el área limitada por la recta $f(x) = -x + 1$ y el eje X, mediante sumas superiores en el intervalo $[-2, 3]$

Solución

Al analizar la gráfica, se consideran 2 intervalos $[-2, 1]$ y $[1, 3]$.



Cálculo del área de $[-2, 1]$

Se aplica la fórmula:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \dfrac{3}{n}$

$$f(a+i\Delta x) = -\left(-2+\frac{3i}{n}\right)+1 = -\frac{3i}{n}+3$$

Al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$A_1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\right)\left(-\frac{3i}{n}+3\right) = \frac{9}{2}u^2$$

Se realiza el cálculo del área de $[1, 3]$,

Se aplica la fórmula:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \dfrac{2}{n}$

$$f(a + i\Delta x) = -\left(1+\frac{2i}{n}\right)+1 = -\frac{2i}{n}$$

Se sustituye en la fórmula y se tiene como resultado:

$$A_2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n}\right)\left(-\frac{2i}{n}\right) = -2u^2$$

El signo negativo indica que el área se encuentra por debajo del eje x, pero para efectos del cálculo del área total, se considera su valor absoluto.

Por tanto, el área buscada es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{9}{2}u^2 + 2u^2 = \frac{13}{2}u^2$$

EJERCICIO 2

Emplea sumas superiores para encontrar el área limitada por la curva, el eje X, las rectas dadas o el intervalo indicado.

1. $f(x) = 4x + 5;\ x = 2,\ x = 5$
2. $f(x) = -2x + 6;\ x = 1,\ x = 4$
3. $f(x) = 4 - x^2;\ [-2, 2]$
4. $f(x) = x^3 - 4x;\ [-1, 1]$
5. $f(x) = 2x^2 - 4x + 3;\ x = 0,\ x = 2$

Calcula el área limitada por la curva $f(x)$ y el eje X en el intervalo indicado utilizando sumas inferiores o superiores.

6. $f(x) = \dfrac{h}{b}x;\ [0, b]$
7. $f(x) = 3 - \dfrac{1}{3}x^2;\ [-3, 3]$
8. $f(x) = (x - 2)^3 + 1;\ [1, 3]$
9. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x;\ [0, 3]$
10. $f(x) = 5x^4;\ [1, 3]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 7

Integrales inmediatas

Reseña HISTÓRICA

Matemático ruso conocido por sus trabajos en teoría de aproximación de funciones, geometría diferencial, polinomios ortogonales y probabilidad.

El nombre "Chevichev" es una transliteración del alfabeto cirílico, por lo que a veces se encuentra con grafías diferentes, por ejemplo: Chevyshev, Tchebyshef y otras similares.

Su aportación en matemáticas es notable, debido a sus múltiples aplicaciones tanto en teoría de la aproximación de funciones por polinomios, como en análisis numérico (inversión de matrices, la evaluación numérica de integrales, la integración numérica de ecuaciones diferenciales, o la más precisa aproximación a una función).

Pafnuti Lvovich Chevichev murió el 26 de noviembre de 1894 en San Petersburgo.

Pafnuti Lvovich Chevichev
(1821-1894)

Definición

Si $F(x)$ es una función con derivada $f'(x)$ entonces, $F(x)$ se llama *integral indefinida* o *antiderivada de* $f'(x)$.

La antiderivada de una función no es única.

Ejemplo

$$x^3, x^3 + 4, x^3 - 1$$

Son todas antiderivadas de $f'(x) = 3x^2$, puesto que todas las antiderivadas de $f'(x)$ quedan incluidas en $F(x) = x^3 + C$, en donde C se llama constante de integración.

Para denotar la integral indefinida de $f'(x)$ se utiliza:

$$\int f'(x)dx$$

Entonces,

$$\int 3x^2dx = x^3 + C$$

Fórmulas

1. $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$
2. $\int a\,dv = a\int dv$
3. $\int dx = x + C$
4. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,,\ n \neq -1$
5. $\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C\,,\ n \neq -1$
6. $\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$
7. $\int a^v\,dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$
8. $\int e^v\,dv = e^v + C$
9. $\int \operatorname{sen} v\,dv = -\cos v + C$
10. $\int \cos v\,dv = \operatorname{sen} v + C$
11. $\int \sec^2 v\,dv = \tan v + C$
12. $\int \csc^2 v\,dv = -\cot v + C$
13. $\int \sec v \tan v\,dv = \sec v + C$
14. $\int \csc v \cot v\,dv = -\csc v + C$
15. $\int \tan v\,dv = -\ln|\cos v| + C = \ln|\sec v| + C$
16. $\int \cot v\,dv = \ln|\operatorname{sen} v| + C$
17. $\int \sec v\,dv = \ln|\sec v + \tan v| + C$
18. $\int \csc v\,dv = \ln|\csc v - \cot v| + C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int x^4dx$

Solución

$$\int x^4dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C$$

2 Encuentra $\int 3ab^2x^4dx$

Solución

$$\int 3ab^2x^4\,dx = 3ab^2\int x^4\,dx = 3ab^2\frac{x^{4+1}}{4+1}+C=\frac{3ab^2x^5}{5}+C$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\int(5x^3+2x^2-6x+3)dx$?

Solución

$$\begin{aligned}\int(5x^3+2x^2-6x+3)dx &= 5\int x^3dx+2\int x^2dx-6\int x\,dx+3\int dx\\ &= 5\frac{x^{3+1}}{3+1}+2\frac{x^{2+1}}{2+1}-6\frac{x^{1+1}}{1+1}+3x+C\\ &= \frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{6}{2}x^2+3x+C\\ &= \frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-3x^2+3x+C\end{aligned}$$

4 Obtén $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$

Solución

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2x^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C$$

5 ¿Cuál es el resultado de $\int-\frac{3\,dx}{x^3}$?

Solución

$$\int-\frac{3\,dx}{x^3}=-3\int\frac{dx}{x^3}=-3\int x^{-3}dx=-3\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{-3x^{-2}}{-2}+C=\frac{3}{2x^2}+C$$

Integrales por cambio de variable

Algunas integrales no se pueden resolver de forma inmediata, entonces se tratará de ser posible transformar la integral a una de las siguientes expresiones

$$\int v^n dv=\frac{v^{n+1}}{n+1}+C \qquad \int\frac{dv}{v}=\ln|v|+C$$

En las integrales que se resuelven por cambio de variable, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se identifica la variable.
2. Se obtiene la diferencial de esta variable y se efectúa el despeje de la misma.
3. Se realiza la sustitución correspondiente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente integral:

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}}x\,dx$$

Solución

Se elige, de la siguiente forma, la nueva variable que se va a integrar:

$$v = 2 + x^2 \quad \rightarrow \quad dv = 2x\,dx$$

Se realizan las sustituciones y se resuelve la integral para obtener el resultado.

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}}x\,dx = \int (2+x^2)^{\frac{3}{2}}(2x)dx = \int v^{\frac{3}{2}}dv = \frac{v^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{v^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2(2+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

Por consiguiente,

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}}x\,dx = \frac{2(2+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

2 Determina el resultado de $\int \sqrt{m+nx}\,dx$

Solución

$v = m + nx,\ dv = n dx$ donde $dx = \dfrac{dv}{n}$

Al realizar las sustituciones se genera la integral:

$$\int \sqrt{m+nx}\,dx = \int (m+nx)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{n}\int v^{\frac{1}{2}}dv = \frac{1}{n}\cdot\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2v^{\frac{3}{2}}}{3n} + C = \frac{2(m+nx)^{\frac{3}{2}}}{3n} + C$$

Finalmente, $\int \sqrt{m+nx}\,dx = \dfrac{2(m+nx)^{\frac{3}{2}}}{3n} + C$

3 Encuentra el resultado de $\int x(2+x^3)^2dx$

Solución

$v = 2 + x^3,\ dv = 3x^2dx$ donde $dx = \dfrac{dv}{3x^2}$

$$\int x(2+x^3)^2dx = \int x\cdot v^2\frac{dv}{3x^2} = \int v^2\frac{dv}{3x}$$

En este ejemplo el cambio de variable no se puede efectuar debido a que la nueva integral tiene dos variables. Entonces, se realiza el producto indicado y se resuelve la integral.

$$\int x(2+x^3)^2dx = \int (4+4x^3+x^6)x\,dx = \int (4x+4x^4+x^7)dx = 2x^2 + \frac{4}{5}x^5 + \frac{x^8}{8} + C$$

Por consiguiente,

$$\int x(2+x^3)^2dx = 2x^2 + \frac{4}{5}x^5 + \frac{x^8}{8} + C$$

4 Precisa la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{2+3x}$$

Solución

$v = 2 + 3x$, $dv = 3dx$ donde $\frac{dv}{3} = dx$

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \int \frac{1}{3}\cdot\frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\int\frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\ln|v| + C = \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C$$

5 Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{e^{\theta}d\theta}{c+ae^{\theta}}$$

Solución

$v = c + ae^{\theta}$, $dv = ae^{\theta}d\theta$ donde, $\frac{dv}{a} = e^{\theta}d\theta$

$$\int \frac{e^{\theta}d\theta}{c+ae^{\theta}} = \int \frac{1}{a}\cdot\frac{dv}{v} = \frac{1}{a}\int\frac{dv}{v} = \frac{1}{a}\ln|v| + C = \frac{1}{a}\ln|c+ae^{\theta}| + C$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{e^{\theta}d\theta}{c+ae^{\theta}} = \frac{1}{a}\ln|c+ae^{\theta}| + C$$

6 Encuentra la primitiva de

$$\int \frac{\operatorname{sen} 5x}{1-\cos 5x}\,dx$$

Solución

$v = 1 - \cos 5x$, $dv = 5 \operatorname{sen} 5x\, dx$ donde $\frac{dv}{5} = \operatorname{sen} 5x\, dx$

Se realiza la sustitución:

$$\int \frac{\operatorname{sen} 5x}{1-\cos 5x}\,dx = \int \frac{1}{5}\cdot\frac{dv}{v} = \frac{1}{5}\int\frac{dv}{v} = \frac{1}{5}\ln|v| + C = \frac{1}{5}\ln|1-\cos 5x| + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{\operatorname{sen} 5x\,dx}{1-\cos 5x} = \frac{1}{5}\ln|1-\cos 5x| + C$$

EJERCICIO 3

Efectúa las siguientes integrales:

1. $\int x^6 dx$
2. $\int 5x^4 dx$
3. $\int bx^3 dx$
4. $\int \sqrt{3}x^2 dx$
5. $\int a\, dx$
6. $\int \frac{3\, dx}{4}$
7. $\int \frac{dx}{3}$
8. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$
9. $\int 5\sqrt[4]{x}\, dx$
10. $\int \frac{dx}{x^3}$
11. $\int \frac{5\, dx}{x^4}$
12. $\int \frac{4\, dx}{x}$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$
14. $\int \frac{6\, dx}{\sqrt[3]{x}}$
15. $\int \sqrt[5]{x^3}\, dx$
16. $\int \frac{a\, dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
17. $\int \frac{5\, dx}{2x}$
18. $\int \sqrt{bx}\, dx$
19. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x}} - 4\sqrt[3]{x}\right) dx$
20. $\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x}\right) dx$
21. $\int \sqrt[3]{at}\, dt$
22. $\int \sqrt{6t}\, dt$
23. $\int (8x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 2x - 3)\, dx$
24. $\int (ax^3 - bx^2 - cx + d)\, dx$
25. $\int \left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{3x}{\sqrt{a}} - 5\sqrt{b}\right) dx$
26. $\int \left(\frac{x^4 - 6x^3 - 7x}{x}\right) dx$
27. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt[5]{x}}\right) dx$
28. $\int \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{\sqrt[4]{x}}\right) dx$
29. $\int \left(y^{\frac{5}{2}} - 5y^{\frac{4}{3}} - 2y^{\frac{1}{4}} - \sqrt{y}\right) dy$
30. $\int \left(\frac{y^{\frac{7}{2}} - y^{\frac{5}{3}} - y^{\frac{1}{4}}}{y^2}\right) dy$
31. $\int \sqrt[3]{t}(5t^2 - 3t + 2)\, dt$
32. $\int \sqrt[3]{7t}\, dt$
33. $\int (3x + 4)^6\, dx$
34. $\int (ax^2 - b)^5 x\, dx$
35. $\int t^2 (t^3 - 4)^2\, dt$
36. $\int (a - by)^4\, dy$
37. $\int (t^2 - 6)^2\, dt$
38. $\int x(x + 4)^2\, dx$

39. $\int x^2(x+1)^3 dx$

40. $\int \sqrt{m+ny}\, dy$

41. $\int \sqrt{5x-3}\, dx$

42. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{at^2+b}}$

43. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x-1}}$

44. $\int \left(\sqrt{x}-4\right)^2 dx$

45. $\int \frac{x\, dx}{(3x^2-4)^4}$

46. $\int \frac{5\, dx}{(3x-4)^2}$

47. $\int \frac{8x\, dx}{(2x^2+5)^4}$

48. $\int \frac{\left(\sqrt{x}-b\right)^2}{\sqrt{x}} dx$

49. $\int \frac{dt}{at+b}$

50. $\int \frac{x\, dx}{3x^2-4}$

51. $\int \frac{dx}{x+3}$

52. $\int \frac{4x\, dx}{2x^2-6}$

53. $\int \frac{(2x-3)\, dx}{(x^2-3x+6)^2}$

54. $\int (x^2-2)\sqrt{x^3-6x+3}\, dx$

55. $\int \frac{y^{n-1}dy}{(ay^n+b)^m}$

56. $\int e^{3x}(1-e^{3x})^2 dx$

57. $\int \frac{(4-\ln|x+3|)^3 dx}{x+3}$

58. $\int \cos 4x(1-\operatorname{sen} 4x)^3 dx$

59. $\int \csc^2 x\sqrt{3+\cot x}\, dx$

60. $\int \frac{\sec 2x \tan 2x}{\sqrt{1-\sec 2x}} dx$

61. $\int \frac{\cos ax}{1-\operatorname{sen} ax} dx$

62. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\sqrt{e^{\sqrt{x}}-1}}{\sqrt{x}} dx$

63. $\int \cot x(2+\ln|\operatorname{sen} x|)\, dx$

64. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{(1-\cos^2 x)^3}$

65. $\int \operatorname{sen}^2 bx \cos bx\, dx$

66. $\int \cot mx \csc^2 mx\, dx$

67. $\int \cos^2 4x \operatorname{sen} 4x\, dx$

68. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\operatorname{sen} 5x+4}} dx$

69. $\int \frac{4x+2}{x+2} dx$

70. $\int \frac{(3x^2+2)\, dx}{x-1}$

71. $\int \frac{dy}{y\ln^2 y}$

72. $\int \frac{dx}{2x\ln 3x}$

73. $\int x^n\sqrt{ax^{n+1}+b}\, dx$

74. $\int \frac{1}{x^3}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\, dx$

75. $\int \csc^2 3x \cos 3x\, dx$

76. $\int \left(\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{4}{x+1}\right) dx$

77. $\int\left(\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x+5}\right)dx$

78. $\int\left(\frac{3}{2x-1}+\frac{5}{3x-4}\right)dx$

79. $\int\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx$

80. $\int \operatorname{sen}^3 x \operatorname{sen} 2x\, dx$

81. $\int\frac{dw}{\operatorname{sen}^2 w\sqrt{1-\cot w}}$

82. $\int\frac{3 \operatorname{sen} y \cos y}{\sqrt{1-2\operatorname{sen}^2 y}}\,dy$

83. $\int\sqrt{1+\cos\alpha}\,d\alpha$

84. $\int\frac{\operatorname{sen}^{\frac{3}{4}} x}{\cos^{\frac{11}{4}} x}\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de funciones exponenciales

Las siguientes fórmulas se emplean para integrar funciones exponenciales

$$\int a^v dv=\frac{a^v}{\ln a}+C \quad \text{y} \quad \int e^v dv=e^v+C$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la integral indefinida de $\int e^{2x}dx$

Solución

Se escoge la variable de acuerdo con la fórmula que se va a emplear, en este caso,

$$v=2x,\quad \text{su diferencial}\quad dv=2dx\quad \text{donde,}\quad dx=\frac{dv}{2}$$

Se realiza el cambio de variable y el resultado es,

$$\int e^{2x}dx=\int e^v\frac{dv}{2}=\frac{1}{2}\int e^v dv=\frac{1}{2}e^v+C \;=\; \frac{1}{2}e^{2x}+C$$

Finalmente,

$$\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

2 Determina el resultado de $\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$

Solución

$$v=\frac{x}{3},\quad dv=\frac{1}{3}\,dx\quad \text{donde,}\quad 3dv=dx$$

Por consiguiente, al realizar la sustitución se obtiene:

$$\int e^{\frac{x}{3}}\,dx=3\int e^v\,dv=3e^v+C \;=\; 3e^{\frac{x}{3}}+C$$

3 Obtén la función primitiva de $\int a^{nx}dx$

Solución

$v = nx, dv = n\,dx$ donde, $\dfrac{dv}{n} = dx$

Se realiza la sustitución,

$$\int a^{nx}dx = \frac{1}{n}\int a^{v}dv = \frac{1}{n}\cdot\frac{a^{v}}{\ln a} + C = \frac{a^{nx}}{n\ln a} + C$$

Por tanto,

$$\int a^{nx}dx = \frac{a^{nx}}{n\ln a} + C$$

4 Encuentra el resultado de $\int \dfrac{dx}{e^{2x}}$

Solución

$v = -2x, dv = -2dx$ donde, $\dfrac{dv}{-2} = dx$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}} = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int e^{v}dv = -\frac{1}{2}e^{v} + C = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C = \frac{1}{2e^{2x}} + C$$

EJERCICIO 4

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int e^{4x}dx$
2. $\int 8e^{\frac{x}{2}}\,dx$
3. $\int e^{ax+b}dx$
4. $\int \dfrac{e^{\sqrt{3x}}dx}{\sqrt{3x}}$
5. $\int \dfrac{e^{8x}}{e^{5x}}\,dx$
6. $\int e^{\cos 4x}\operatorname{sen} 4x\,dx$
7. $\int 2x^{2}e^{x^{3}}dx$
8. $\int b^{4x}dx$
9. $\int 3^{2x}dx$
10. $\int 2^{x}e^{x}dx$
11. $\int \sqrt[3]{e^{x}}\,dx$
12. $\int \sqrt{e^{3x}}\,dx$
13. $\int \dfrac{dx}{5^{4x}}$
14. $\int \dfrac{e^{\frac{1}{x^{2}}}}{x^{3}}\,dx$
15. $\int \left[\sqrt[3]{e^{x}}\right]^{4}dx$
16. $\int x^{2}(3 - e^{x^{3}})\,dx$
17. $\int (2x-3)e^{x^{2}-3x+1}dx$
18. $\int \dfrac{dt}{\sqrt[5]{e^{2t}}}$

19. $\int e^{\frac{1}{\sec 2x}} \operatorname{sen} 2x\, dx$

20. $\int \frac{t^3 dt}{e^{2t^4}}$

21. $\int 4^x \cdot e^{2x} dx$

22. $\int \left(e^{-\frac{x}{4}} + e^{\frac{x}{2}} \right) dx$

23. $\int (e^{3x} - 2)^2 dx$

24. $\int x \cdot 5^{x^2} dx$

25. $\int (e^{2x} - e^{-2x})^2 dx$

26. $\int e^{\tan 3x} \sec^2 3x\, dx$

27. $\int x^2 5^{x^3} dx$

28. $\int (10^{3x} - 2^x)\, dx$

29. $\int \left(e^{\frac{x}{n}} - a^{\frac{x}{n}} \right) dx$

30. $\int \left(\frac{e^{4x} - 5}{e^{2x}} \right) dx$

31. $\int \left(\frac{1 - e^{ax}}{e^{ax}} \right) dx$

32. $\int \frac{e^{\cos^2 x}}{\csc 2x} dx$

33. $\int \frac{e^{\operatorname{arc sen} 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$

34. $\int \frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} dx$

35. $\int (3^{2x} + 3^{4x})^2 dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas se integran con las siguientes fórmulas y en algunos casos auxiliándose de un cambio de variable.

1. $\int \operatorname{sen} v\, dv = -\cos v + C$
2. $\int \cos v\, dv = \operatorname{sen} v + C$
3. $\int \sec^2 v\, dv = \tan v + C$
4. $\int \csc^2 v\, dv = -\cot v + C$
5. $\int \sec v \tan v\, dv = \sec v + C$
6. $\int \csc v \cot v\, dv = -\csc v + C$
7. $\int \tan v\, dv = -\ln|\cos v| + C = \ln|\sec v| + C$
8. $\int \cot v\, dv = \ln|\operatorname{sen} v| + C$
9. $\int \sec v\, dv = \ln|\sec v + \tan v| + C$
10. $\int \csc v\, dv = \ln|\csc v - \cot v| + C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \cos my\, dy$

Solución

Se hace un cambio de variable y se obtiene su diferencial:

$$v = my, \quad dv = mdy, \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{m} = dy$$

Se sustituye y se resuelve la integral:

$$\int \cos my\, dy = \int \cos v \frac{dv}{m} = \frac{1}{m}\int \cos v\, dv = \frac{1}{m}\text{sen } v + C = \frac{1}{m}\text{sen } my + C$$

2 ¿Cuál es el resultado de $\int \sec 7x\, dx$?

Solución

$v = 7x, \quad dv = 7dx \quad \text{donde,} \quad \dfrac{dv}{7} = dx$

$$\int \sec 7x\, dx = \frac{1}{7}\int \sec v\, dv = \frac{1}{7}\ln|\sec v + \tan v| + C = \frac{1}{7}\ln|\sec 7x + \tan 7x| + C$$

3 Obtén el resultado de $\int x \cot x^2 dx$

Solución

$v = x^2, \quad dv = 2x\, dx \quad \text{donde,} \quad \dfrac{dv}{2} = x\, dx$

Se realiza el cambio de variable y se resuelve la integral:

$$\int x \cot x^2 dx = \int \cot v \frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int \cot v\, dv = \frac{1}{2}\ln|\text{sen } v| + C = \frac{1}{2}\ln|\text{sen } x^2| + C$$

4 Encuentra el resultado de $\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

Solución

La fórmula que se va a utilizar es $\int \tan v\, dv = \ln|\sec v| + C$, de manera que:

$$v = \sqrt{x}, \quad dv = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \text{donde,} \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dv$$

Se realiza la sustitución y se resuelve la integral:

$$\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \tan v\, dv = 2\ln|\sec v| + C = 2\ln|\sec \sqrt{x}| + C$$

5 Determina $\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\,dx$

Solución

Antes de resolver esta integral se recomienda emplear identidades trigonométricas.

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\dfrac{2\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{2\operatorname{sen} x\cdot\cos^2 x}{\cos x(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)}=\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}$$

$$=\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$$

$$=\tan 2x$$

Al sustituir la identidad encontrada, se tiene $\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\,dx=\int \tan 2x\,dx$, donde:

$$v=2x,\quad dv=2dx;\quad dx=\frac{dv}{2}$$

Se realiza la sustitución y se resuelve la integral.

$$\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\,dx=\int \tan 2x\,dx=\frac{1}{2}\int \tan v\,dv=-\frac{1}{2}\ln|\cos v|+C=-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$$

EJERCICIO 5

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen} 5x\,dx$
2. $\int \cos 6x\,dx$
3. $\int \operatorname{sen}\frac{x}{4}\,dx$
4. $\int \tan bx\,dx$
5. $\int \sec^2\frac{x}{a}\,dx$
6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax}$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 bx}$
8. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$
9. $\int \csc\frac{t}{4}\cot\frac{t}{4}\,dt$
10. $\int x\operatorname{sen} 4x^2 dx$
11. $\int x^2\cos\frac{x^3}{5}\,dx$
12. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$
13. $\int \sec ax\tan ax\,dx$
14. $\int 3x\sec^2 4x^2 dx$
15. $\int \csc^2(3x-1)dx$
16. $\int \cot(ax-b)dx$
17. $\int \sec ax\,dx$
18. $\int x\csc 4x^2 dx$

19. $\int \cot x\sqrt{\csc x}\, dx$

20. $\int (\cot b\theta + \tan b\theta)^2 d\theta$

21. $\int (\csc 3x - \cot 3x)^2 dx$

22. $\int (\tan 5x - \sec 5x)^2 dx$

23. $\int \frac{\text{sen}^3 x}{1 - \cos x} dx$

24. $\int x \cos(2 - x^2)\, dx$

25. $\int \frac{\cos^2 x}{\text{sen } x} dx$

26. $\int \sqrt{1 + \text{sen } 2x}\, dx$

27. $\int \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} dx$

28. $\int \left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right]^{-2} dx$

29. $\int \frac{dw}{\cos^2 w - \cos 2w}$

30. $\int \left(\frac{1 + \text{sen}^2 x}{1 + \cos 2x}\right) dx$

31. $\int (\cot^2 x + \cot^4 x)\, dx$

32. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\text{sen } x}} dx$

33. $\int \frac{dw}{\text{sen}^2 w(1 - 4\cot w)}$

34. $\int \left(\frac{1 - \text{sen } x}{1 + \text{sen } x}\right) dx$

35. $\int \frac{dy}{\text{sen}\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right)}$

36. $\int \frac{2 \tan \alpha\, d\alpha}{\sec^2 \alpha - 2\tan^2 \alpha}$

37. $\int \frac{\text{sen } 2\theta}{\sqrt{\text{sen}^2 \theta + 1}} d\theta$

38. $\int e^{2x} \text{sen}(e^{2x})\, dx$

39. $\int \frac{\text{sen}(\ln x^2)}{x} dx$

40. $\int \frac{\sqrt{x} \sec \sqrt{x}}{3x} dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales con expresiones de la forma

$$\sqrt{v^2 \pm a^2},\ \sqrt{a^2 - v^2},\ v^2 \pm a^2,\ a^2 - v^2$$

Fórmulas

1. $\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{arc tan} \frac{v}{a} + C$

2. $\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{v - a}{v + a}\right| + C$

3. $\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a + v}{a - v}\right| + C$

4. $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \text{arc sen} \frac{v}{a} + C$

5. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

6. $\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{arc sec} \frac{v}{a} + C$

7. $\int \sqrt{a^2 - v^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2} \text{arc sen} \frac{v}{a} + C$

8. $\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int \frac{dx}{x^2+36}$

Solución

Se utiliza la fórmula:

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arc tan}\frac{v}{a} + C$$

se deducen las siguientes equivalencias y se sustituyen en la fórmula.

$$v^2 = x^2,\ v = x \text{ y } dv = dx;\ a^2 = 36,\ a = 6$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x^2+36} = \frac{1}{6}\text{arc tan}\frac{x}{6} + C$$

2 Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{16x^2-9}$

Solución

Para resolver la integral se utiliza la fórmula:

$$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| + C$$

se determina la variable y se encuentra su diferencial,

$$v^2 = 16x^2,\ v = 4x,\ dv = 4dx \quad \text{y} \quad \frac{dv}{4} = dx;\ a^2 = 9,\ a = 3$$

Finalmente, se realiza la sustitución y se resuelve la integral.

$$\int \frac{dx}{16x^2-9} = \frac{1}{4}\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2(3)}\ln\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right| + C = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right| + C$$

3 Obtén el resultado de $\int \frac{m}{n^2x^2-p^2}\,dx$

Solución

$$a^2 = p^2,\ a = p \quad v^2 = n^2x^2;\ v = nx, dv = ndx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{n} = dx$$

Se sustituye y se resuelve la integral,

$$\int \frac{mdx}{n^2x^2-p^2} = \frac{m}{n}\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{2(p)}\ln\left|\frac{nx-p}{nx+p}\right| + C = \frac{m}{2np}\ln\left|\frac{nx-p}{nx+p}\right| + C$$

Se concluye que,

$$\int \frac{mdx}{n^2x^2-p^2} = \frac{m}{2np}\ln\left|\frac{nx-p}{nx+p}\right| + C$$

4 Precisa el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$

Solución

Para resolver la integral se utiliza la fórmula,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \text{arc sen}\,\frac{v}{a} + C$$

se deduce a, v y la diferencial dv

$$a^2 = 9,\ a = 3;\ v^2 = 25x^2,\ v = 5x,\ dv = 5\,dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{5} = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \frac{1}{5}\text{arc sen}\,\frac{v}{a} + C = \frac{1}{5}\text{arc sen}\,\frac{5x}{3} + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{5}\text{arc sen}\,\frac{5x}{3} + C$$

5 Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}}$

Solución

$$a^2 = 5,\ a = \sqrt{5}\ ;\ v^2 = 9x^2,\ v = 3x,\ dv = 3\,dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{3} = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}} = \int \frac{\frac{dv}{3}}{\sqrt{v^2+a^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x + \sqrt{9x^2+5}\right| + C$$

EJERCICIO 6

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x^2+81}$
2. $\int \frac{dy}{by^2+b^3}$
3. $\int \frac{dy}{y^2-16}$
4. $\int \frac{dx}{25-4x^2}$
5. $\int \frac{dx}{2x^2-16}$
6. $\int \frac{dx}{9x^2-144}$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-7}}$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-8}}$

11. $\int \frac{4\,dx}{b^4x^2+m^2}$

12. $\int \frac{2v\,dv}{v^4-b^4}$

13. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+4)}$

14. $\int \frac{dx}{\sec x(1-\operatorname{sen}^2 x)}$

15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^4}}$

16. $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{3-3x^2}}$

17. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x}\sqrt{e^x+4}}$

18. $\int \frac{dy}{\sqrt{5-4y^2}}$

19. $\int \frac{dy}{25a-a^3y^2}$

20. $\int \frac{dt}{\sqrt{3t^2+5}}$

21. $\int \frac{dy}{5-2y^2}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4}}$

23. $\int \frac{dx}{x^2+b^4}$

24. $\int \frac{dy}{\sqrt{4-2y^2}}$

25. $\int e^{2x}\sqrt{16-e^{4x}}\,dx$

26. $\int \sqrt{1-2x^2}\,dx$

27. $\int \frac{dm}{\sqrt{8-\frac{m^2}{5}}}$

28. $\int \sqrt{(2x+1)^2-a^2}\,dx$

29. $\int \frac{\sqrt{28+343x^{2m}}}{x^{1-m}}\,dx$

30. $\int \frac{dt}{2t^2+7}$

31. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{5x^2-16}}$

32. $\int \frac{dt}{\csc(2t)\cdot(5-\cos^2 2t)}$

33. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1+\cos^2 x}$

34. $\int \sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}\,dt + \int \ln(3t)\sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}\,dt$,

demuestra que:

$$\frac{t\ln(3t)}{2}\sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}+2\ln\left(t\ln(3t)+\sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}\right)+C$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales en las que se completa un trinomio cuadrado perfecto

En aquellas integrales con un denominador de la forma ax^2+bx+c, se utiliza el método de completar un trinomio cuadrado perfecto para llegar a las formas:

$$\sqrt{v^2\pm a^2},\ \sqrt{a^2-v^2},\ v^2\pm a^2,\ a^2-v^2$$

Según sea el caso.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$

Solución

Se completa el TCP, entonces, el denominador se expresa como:

$$x^2+4x+3=(x^2+4x+4)-4+3=(x+2)^2-1$$

Donde,

$$v^2=(x+2)^2,\ v=x+2,\ dv=dx;\ a^2=1,\ a=1$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3}=\int \frac{dx}{(x+2)^2-1}=\frac{1}{2(1)}\ln\left|\frac{x+2-1}{x+2+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$$

2 Determina el resultado de $\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}$

Solución

La expresión

$$x^2-8x+25=(x^2-8x+16)-16+25=(x-4)^2+9$$

Donde,

$$v^2=(x-4)^2,\ v=x-4,\ dv=dx;\ a^2=9,\ a=3$$

Finalmente,

$$\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}=3\int \frac{dx}{(x-4)^2+9}=3\cdot\frac{1}{3}\text{arc tan}\frac{x-4}{3}+C=\text{arc tan}\left(\frac{x-4}{3}\right)+C$$

3 Encuentra el resultado de la integral indefinida $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$

Solución

Se completa el TCP y el trinomio se convierte a la expresión equivalente.

$$2x^2-2x+1=2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)=2\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=2\left[\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$$

Se utiliza la fórmula,

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}\text{arc tan}\frac{v}{a}+C$$

se obtiene la variable, su diferencial y el valor de a, entonces,

$$v^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,\ v=x-\frac{1}{2},\ dv=dx;\ a^2=\frac{1}{4},\ a=\frac{1}{2}$$

Se realizan los cambios y se resuelve la integral.

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\text{arc tan}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+C = \text{arc tan}\frac{\frac{2x-1}{2}}{\frac{1}{2}}+C$$

Por tanto, el resultado de la integral es:

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1} = \text{arc tan}(2x-1)+C$$

4 Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

Solución

La expresión

$$2-3x-4x^2 = -4\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right) = -4\left(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{9}{64}-\frac{9}{64}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -4\left[\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\frac{41}{64}\right] = 4\left[\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right]$$

Se deduce entonces la fórmula que se va a utilizar:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \text{arc sen}\frac{v}{a}+C$$

Donde,

$$v^2 = \left(x+\frac{3}{8}\right)^2 \quad v = x+\frac{3}{8},\ dv = dx;\ a^2 = \frac{41}{64},\ a = \frac{\sqrt{41}}{8}$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left[\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right]}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\text{arc sen}\frac{x+\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{41}}{8}}+C = \frac{1}{2}\cdot\text{arc sen}\frac{\frac{8x+3}{8}}{\frac{\sqrt{41}}{8}}+C = \frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$$

5 Encuentra el resultado de $\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5}$

Solución

En este caso, la expresión se representa como:

$$\frac{2x+5}{x^2+2x+5} = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{3}{x^2+2x+5}$$

Se ha elegido esta separación debido a que,

$$\text{si } v = x^2+2x+5 \text{ entonces } dv-(2x+2)dx$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

Para la integral $\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5}$, se realiza el cambio,

$$v = x^2+2x+5\,,\ dv = (2x+2)dx \ \text{ y } \ \frac{dv}{(2x+2)} = dx$$

Resultando:

$$\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + C$$

Ahora, con la integral $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$, se realiza el siguiente cambio:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\text{arc tan}\frac{x+1}{2} + C$$

Finalmente, al sustituir se obtiene:

$$\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \ln(x^2+2x+5) + 3\cdot\frac{1}{2}\text{ arc tan}\frac{x+1}{2} + C$$

$$= \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\text{arc tan}\frac{x+1}{2} + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\text{arc tan}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

6 Obtén el resultado de $\int \frac{\sqrt{e^{5x}} + 4\sqrt{e^{3x}}\,dx}{\sqrt{e^{3x}+6e^{2x}+5e^x}}$

Solución

La integral se expresa de la siguiente manera:

$$\int \frac{\sqrt{e^{5x}} + 4\sqrt{e^{3x}}dx}{\sqrt{e^{3x}+6e^{2x}+5e^x}} = \int \frac{\sqrt{e^x}\,(e^{2x}+4e^x)dx}{\sqrt{e^x}\,\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}} = \int \frac{(e^{2x}+4e^x)\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}}$$

Se realiza la separación en el numerador

$$\int \frac{(e^{2x}+4e^x)\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}} = \int \frac{(e^{2x}+3e^x+e^x)\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}} = \int \frac{(e^{2x}+3e^x)dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}} + \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}}$$

Ahora, para la integral $\int \frac{(e^{2x}+3e^{x})dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$, se realiza el siguiente cambio:

$$v = e^{2x} + 6e^{x} + 5,\ dv = (2e^{2x} + 6e^{x})dx = 2(e^{2x} + 3e^{x})dx$$

Entonces,

$$\int \frac{(e^{2x}+3e^{x})dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}$$

Por consiguiente, para la integral $\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$, se completa el trinomio cuadrado perfecto y se realiza el cambio de variable.

$$\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+9-9+5}} = \int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+9-4}} = \int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{(e^{x}+3)^{2}-4}}$$

Donde,

$$w = e^{x} + 3,\ dw = e^{x}dx$$

Entonces,

$$\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{(e^{x}+3)^{2}-4}} = \int \frac{dw}{\sqrt{w^{2}-4}} = \ln\left|w+\sqrt{w^{2}-4}\right| = \ln\left|e^{x}+3+\sqrt{(e^{x}+3)^{2}-4}\right|$$

$$= \ln\left|e^{x}+3+\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}\right|$$

Por tanto, se concluye que:

$$\int \frac{\sqrt{e^{5x}}+4\sqrt{e^{3x}}dx}{\sqrt{e^{3x}+6e^{2x}+5e^{x}}} = \sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5} + \ln\left|e^{x}+3+\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}\right| + C$$

EJERCICIO 7

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x^{2}+6x}$
2. $\int \frac{dx}{x^{2}+8x}$
3. $\int \frac{dx}{x^{2}+5x+6}$
4. $\int \frac{dx}{2x^{2}+3x+1}$
5. $\int \frac{dx}{x^{2}+5x-14}$
6. $\int \frac{dx}{2x^{2}+9x+4}$
7. $\int \frac{dx}{a^{2}x^{2}+8ax+15}$
8. $\int \frac{3e^{x}dx}{e^{2x}+9e^{x}+20}$
9. $\int \frac{dw}{13w-2w^{2}-15}$
10. $\int \frac{d\alpha}{5+9\alpha-2\alpha^{2}}$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 8}$

12. $\int \frac{e^{2x} + 3e^x - 3}{e^{2x} + 2e^x - 3}\, dx$

13. $\int \frac{\cos x\, dx}{(\operatorname{sen} x - 3)^2 - 3}$

14. $\int \frac{dw}{\sqrt{-5w^2 + 22w - 8}}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}}$

16. $\int \frac{dz}{\sqrt{3z^2 + 4z}}$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x}}$

18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 7 \ln x + 6}}$

19. $\int \frac{dw}{\sqrt{w^2 - 9w + 5}}$

20. $\int \sqrt{x^2 + 4x - 3}\, dx$

21. $\int \sqrt{4 - 3x - 2x^2}\, dx$

22. $\int \sqrt{3x - x^2}\, dx$

23. $\int \sqrt{3x^2 - 4x}\, dx$

24. $\int x\sqrt{x^4 - x^2 - 20}\, dx$

25. $\int \sqrt{-x^2 - 5x + 24}\, dx$

26. $\int \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} + 2}\, dx$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - 21x}}$

28. $\int e^{nx}\sqrt{3 + 2e^{nx} - e^{2nx}}\, dx$

29. $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + y + 1}}$

30. $\int \sqrt{3x^2 + 4x + 1}\, dx$

31. $\int \frac{dw}{\sqrt{5w - 2w^2}}$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 3x\sqrt{ax} + 2x}}$

33. $\int \frac{dy}{\sqrt{3y^2 + 13y - 10}}$

34. $\int \frac{(6x - 5)}{3x^2 + 4x + 1}\, dx$

35. $\int \frac{3x - 4}{9 - x^2}\, dx$

36. $\int \frac{4 - 7x}{9x^2 - 16}\, dx$

37. $\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 4x + 1}\, dx$

38. $\int \frac{x - 2}{3x^2 + 5x - 4}\, dx$

39. $\int \frac{x + 5}{x^2 - 7x + 6}\, dx$

40. $\int \frac{2x + 21}{3x^2 + 27x - 15}\, dx$

41. $\int \frac{(3x + 2)}{\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$

42. $\int \frac{3x - 11}{\sqrt{4 - 9x^2}}\, dx$

43. $\int \frac{5 - 2x}{\sqrt{16x^2 + 25}}\, dx$

44. $\int \frac{4 - 3x}{\sqrt{7 - 2x^2}}\, dx$

45. $\int \frac{x+6}{8+14x-10x^2}\,dx$

46. $\int \frac{5x-11}{\sqrt{x^2+3x-5}}\,dx$

47. $\int \frac{2-x}{\sqrt{2x^2+5x-1}}\,dx$

48. $\int \frac{5x+1}{\sqrt{4-2x-x^2}}\,dx$

49. $\int (2x+1)\sqrt{x^2-3x+4}\,dx$

50. $\int (3x+7)\sqrt{x^2+7x+6}\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 8

INTEGRALES DE DIFERENCIALES TRIGONOMÉTRICAS

Reseña HISTÓRICA

Matemático y físico francés nacido en Auxerre y fallecido en París, conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas series de Fourier.

Participó en la Revolución Francesa y, gracias a la caída del poder de Robespierre, se salvó de ser guillotinado. Se incorporó a la Escuela Normal Superior de París en donde tuvo entre sus profesores a Joseph-Louis Lagrange y Pierre-Simon Laplace. Posteriormente ocupó una cátedra en la Escuela Politécnica.

Según él, cualquier oscilación periódica, por complicada que sea, se puede descomponer en serie de movimientos ondulatorios simples y regulares, la suma de los cuales es la variación periódica compleja original. Es decir se expresa como una serie matemática en la cual los términos son funciones trigonométricas. El teorema de Fourier tiene muchas aplicaciones; se puede utilizar en el estudio del sonido y de la luz y, desde luego, en cualquier fenómeno ondulatorio. El estudio matemático de tales fenómenos, basado en el teorema de Fourier se llama análisis armónico.

Jean-Baptiste-Joseph Fourier
(1768-1830)

Integrales de la forma: $\int \text{sen}^m v\, dv$, $\int \cos^n v\, dv$, con *m* y *n* impar

En aquellas integrales cuya función seno o coseno sea una potencia impar, se realiza la separación en potencias pares y siempre sobra una lineal, la cual funcionará como diferencial; el resto se transforma mediante las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int \text{sen}^3 x\, dx$

Solución

Se separa la potencia de la siguiente manera:

$$\int \text{sen}^3 x\, dx = \int \text{sen}^2 x \,\text{sen}\, x\, dx$$

Se sustituye $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, de esta forma:

$$v = \cos x,\ dv = -\text{sen}\, x\, dx,\ -dv = \text{sen}\, x\, dx$$

$$\begin{aligned}\int \text{sen}^3 x\, dx = \int \text{sen}^2 x\,\text{sen}\, x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\,\text{sen}\, x\, dx &= \int (1-v^2)(-dv) = \int -dv + \int v^2 dv\\ &= -v + \frac{1}{3}v^3 + C\\ &= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C\\ &= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\int \text{sen}^3 x\, dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

2 Precisa el resultado de $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x}$

Solución

$$\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \int \frac{\cos^2 x \cos x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \int \frac{(1-\text{sen}^2 x)\cos x\, dx}{\text{sen}^4 x}$$

Se realiza el cambio de variable, $v = \text{sen}\, x$ y $dv = \cos x\, dx$,

$$\int \frac{\left(1-v^2\right)dv}{v^4} = \int \frac{dv}{v^4} - \int \frac{dv}{v^2} = \int v^{-4}dv - \int v^{-2}dv = \frac{v^{-3}}{-3} - \frac{v^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3v^3} + \frac{1}{v} + C$$

Pero $v = \text{sen}\, x$, entonces,

$$\frac{1}{\text{sen}\, x} - \frac{1}{3\text{sen}^3 x} + C = \csc\, x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$$

Finalmente, $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$

3 Encuentra el resultado de $\int \frac{\text{sen}^5 y\, dy}{\sqrt{\cos y}}$

Solución

$$\int \frac{\text{sen}^5 y}{\sqrt{\cos y}}\, dy = \int \frac{\text{sen}^4 y\ \text{sen}\ y\, dy}{\sqrt{\cos y}} = \int \frac{(\text{sen}^2 y)^2 \text{sen}\ y\, dy}{\sqrt{\cos y}}$$

Se sustituye $\text{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y$ en la integral:

$$\int \frac{(1-\cos^2 y)^2\ \text{sen}\ y\, dy}{\sqrt{\cos y}}$$

se realiza el cambio de variable, $v = \cos y$, $dv = -\text{sen}\ y\, dy$, $-dv = \text{sen}\ y\, dy$

$$-\int \frac{\left(1-v^2\right)^2 dv}{\sqrt{v}} = -\int \frac{\left(1-2v^2+v^4\right)dv}{\sqrt{v}} = -\int \frac{dv}{\sqrt{v}} + 2\int v^{\frac{3}{2}}\, dv - \int v^{\frac{7}{2}}\, dv$$

$$= -2\sqrt{v} + \frac{4}{5}v^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{9}v^{\frac{9}{2}} + C$$

Al factorizar $-2\sqrt{v}$ de la expresión se obtiene:

$$= -2\sqrt{v}\left(1 - \frac{2}{5}v^2 + \frac{1}{9}v^4\right) + C \text{, pero } v = \cos y$$

Finalmente,

$$\int \frac{\text{sen}^5 y\, dy}{\sqrt{\cos y}} = -2\sqrt{\cos y}\left(1 - \frac{2}{5}\cos^2 y + \frac{1}{9}\cos^4 y\right) + C$$

EJERCICIO 8

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \text{sen}^3 4x \cos 4x\, dx$
2. $\int \cos^5 3x\ \text{sen}\ 3x\, dx$
3. $\int \text{sen}^3 ax\, dx$
4. $\int \text{sen}^3 5x\, dx$
5. $\int \text{sen}^3 \frac{x}{4}\, dx$
6. $\int \cos^3 x\, dx$
7. $\int \cos^3 ax\, dx$
8. $\int \cos^3 6x\, dx$
9. $\int \cos^3 \frac{x}{3}\, dx$
10. $\int \text{sen}^5 x\, dx$
11. $\int \text{sen}^5 ax\, dx$
12. $\int \text{sen}^5 4x\, dx$
13. $\int \text{sen}^5 \frac{x}{2}\, dx$
14. $\int \cos^5 y\, dy$
15. $\int \cos^5 bx\, dx$
16. $\int \cos^5 \frac{x}{3}\, dx$

17. $\int \text{sen}^7\theta\, d\theta$

18. $\int \text{sen}^7 3x\, dx$

19. $\int \cos^7 y\, dy$

20. $\int \cos^7 4x\, dx$

21. $\int \text{sen}^3 4x \cos^5 4x\, dx$

22. $\int \cos^3 x\, \text{sen}^5 x\, dx$

23. $\int \frac{\cos^5 2x}{\sqrt{\text{sen}\, 2x}}\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de la forma: $\int \tan^n v\, dv$, $\int \cot^n v\, dv$ con n par o impar

En este tipo de integrales se separan potencias pares y se sustituye por la identidad trigonométrica respectiva:

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \qquad \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \tan^3 x\, dx$

Solución

Se realiza la separación de la potencia:

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \tan^2 x\, dx$$

Se sustituye $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$,

$$\int \tan x(\sec^2 x - 1)\, dx = \int \tan x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx$$

Al aplicar $v = \tan x$, $dv = \sec^2 x\, dx$, para la primera integral, entonces:

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx = \int v\, dv - \int \tan x\, dx = \frac{v^2}{2} - (-\ln|\cos x|) + C$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

2 Obtén el resultado de $\int (\sec 3x + \tan 3x)^2\, dx$

Solución

Se desarrolla el binomio al cuadrado y se obtiene:

$$\int (\sec^2 3x + 2\sec 3x \tan 3x + \tan^2 3x)\, dx$$

se realiza el cambio $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$\int (\sec^2 3x + 2\sec 3x \tan 3x + \sec^2 3x - 1) dx$$

Se simplifican términos semejantes y resulta:

$$\int (2\sec^2 3x + 2\sec 3x \tan 3x - 1)\, dx$$

Se efectúa el cambio, $v = 3x$, entonces $dv = 3dx$ y $\frac{dv}{3} = dx$

Se procede a integrar

$$= \int \frac{2}{3}\sec^2 v\, dv + \int \frac{2}{3}\sec v \tan v\, dv - \int \frac{dv}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\int \sec^2 v\, dv + \frac{2}{3}\int \sec v \tan v\, dv - \frac{1}{3}\int dv$$

$$= \frac{2}{3}\tan v + \frac{2}{3}\sec v - \frac{1}{3}v + C\ ;$$

pero $v = 3x$, entonces finalmente se obtiene:

$$\int (\sec 3x + \tan 3x)^2\, dx = \frac{2}{3}\tan 3x + \frac{2}{3}\sec 3x - x + C$$

3 Determina el resultado de $\int \cot^5 ax\, dx$

Solución

Al separar la integral

$$\int \cot^5 ax\, dx = \int \cot^3 ax \cot^2 ax\, dx$$

Se realiza el cambio $\cot^2 ax = \csc^2 ax - 1$

$$\int \cot^3 ax(\csc^2 ax - 1)dx = \int \cot^3 ax \csc^2 ax\, dx - \int \cot^3 ax\, dx$$

De nueva cuenta se tiene una potencia impar, por lo que se vuelve a separar y a sustituir la identidad:

$$= \int \cot^3 ax \cdot \csc^2 ax\, dx - \int \cot ax \cot^2 ax\, dx = \int \cot^3 ax \csc^2 ax\, dx - \int \cot ax(\csc^2 ax - 1)dx$$

$$= \int \cot^3 ax \cdot \csc^2 ax\, dx - \int \cot ax \csc^2 ax\, dx + \int \cot ax\, dx$$

$v = \cot ax$ y $dv = -a \csc^2 ax\, dx$

$$= -\frac{1}{a}\int v^3 dv + \frac{1}{a}\int v dv + \frac{1}{a}\ln|\text{sen } ax| + C$$

$$= -\frac{1}{a}\cdot\frac{v^4}{4} + \frac{1}{a}\cdot\frac{v^2}{2} + \frac{1}{a}\ln|\text{sen } ax| + C$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\frac{v^4}{4} - \frac{v^2}{2} - \ln|\text{sen } ax|\right) + C,$$

pero $v = \cot ax$, por lo que finalmente,

$$\int \cot^5 ax\, dx = -\frac{1}{a}\left(\frac{\cot^4 ax}{4} - \frac{\cot^2 ax}{2} - \ln|\text{sen } ax|\right) + C$$

EJERCICIO 9

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int \tan^3 5x\, dx$
2. $\int \tan^3 \frac{x}{2}\, dx$
3. $\int \cot^3 4x\, dx$
4. $\int \cot^3 \frac{x}{3}\, dx$
5. $\int \cot^5 6x\, dx$
6. $\int \cot^5 \frac{y}{4}\, dy$
7. $\int \tan^5 5x\, dx$
8. $\int \cot^4 5x\, dx$
9. $\int \tan^4 6x\, dx$
10. $\int (\tan 3x - \cot 3x)^3\, dx$
11. $\int (\tan^2 2y + \tan^4 2y)\, dy$
12. $\int (\cot^4 3x + \cot^2 3x)\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de la forma: $\int \sec^n v\, dv$, $\int \csc^n v\, dv$ con n par

En este tipo de integrales se separa en potencias pares y se sustituye por la identidad trigonométrica respectiva.

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x\ ;\ \csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Precisa el resultado de $\int \sec^4 x\, dx$

Solución

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

Se realiza el cambio con la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$$\int (1 + \tan^2 x)\sec^2 x\, dx$$

Al efectuar

$$v = \tan x \text{ y } dv = \sec^2 x\, dx$$

se obtiene:

$$\int (1+v^2)dv = \int dv + \int v^2 dv = v + \frac{v^3}{3} + C$$

Pero $v = \tan x$, entonces,

$$\int \sec^4 x\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$$

2 Obtén el resultado de $\int \csc^4 \frac{x}{4}\, dx$

Solución

$$\int \csc^4 \frac{x}{4} dx = \int \csc^2 \frac{x}{4}\ \csc^2 \frac{x}{4}\, dx\ = \int\left(1+\cot^2 \frac{x}{4}\right)\csc^2 \frac{x}{4}\, dx$$

Donde

$$v = \cot\frac{x}{4}\ \text{ y }\ dv = -\frac{1}{4}\csc^2 \frac{x}{4}\, dx$$

entonces:

$$= -4\int(1+v^2)dv = -4\int dv - 4\int v^2\, dv\ = -4v - \frac{4}{3}v^3 + C$$

pero $v = \cot\ \frac{x}{4}$, por consiguiente

$$\int \csc^4 \frac{x}{4} dx = -\frac{4}{3}\cot^3 \frac{x}{4} - 4\cot\frac{x}{4} + C$$

Integrales de la forma: $\int \tan^m v \cdot \sec^n v\, dv$, $\int \cot^m v \cdot \csc^n v\, dv$ con n par y m par o impar

En este tipo de integrales se emplean las siguientes identidades trigonométricas:

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1;\ \csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$

Solución

En la integral la secante tiene potencia par, entonces se realiza la separación de una secante cuadrada y se sustituye por la identidad trigonométrica correspondiente.

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx\ = \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)\sec^2 x\, dx$$

Al efectuar

$$v = \tan x \quad \text{y} \quad dv = \sec^2 x\, dx$$

finalmente se determina que:

$$= \int v^2(1+v^2)dv\ = \int(v^2+v^4)dv = \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + C\ = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

2 Encuentra el resultado de $\int \tan^3 \frac{x}{4} \sec^3 \frac{x}{4}\, dx$

Solución

En la integral las potencias, tanto de la tangente como de la secante, son impares, por lo que la separación es para ambas funciones.

$$\int \tan^3 \frac{x}{4} \sec^3 \frac{x}{4}\, dx = \int \tan^2 \frac{x}{4} \sec^2 \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4} \sec \frac{x}{4}\, dx$$

Luego

$$\tan^2 \frac{x}{4} = \sec^2 \frac{x}{4} - 1$$

por consiguiente,

$$= \int \tan^2 \frac{x}{4} \sec^2 \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4} \sec \frac{x}{4}\, dx = \int \left(\sec^2 \frac{x}{4} - 1 \right) \sec^2 \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4} \sec \frac{x}{4}\, dx$$

Ahora, al hacer

$$v = \sec \frac{x}{4} \text{ y } dv = \frac{1}{4} \sec \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4}\, dx$$

se obtiene:

$$= 4\int (v^2 - 1)v^2 dv = 4\int v^4 dv - 4\int v^2\, dv = \frac{4}{5}v^5 - \frac{4}{3}v^3 + C$$

$$= \frac{4}{5}\sec^5 \frac{x}{4} - \frac{4}{3}\sec^3 \frac{x}{4} + C$$

EJERCICIO 10

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \sec^4 3x\, dx$
2. $\int \sec^4 ax\, dx$
3. $\int \sec^4 \frac{x}{6}\, dx$
4. $\int \csc^4 9x\, dx$
5. $\int \csc^4 bx\, dx$
6. $\int \csc^4 \frac{x}{7}\, dx$
7. $\int \sec^4 \frac{2x}{3}\, dx$
8. $\int \csc^4 \frac{5x}{4}\, dx$
9. $\int \tan^2 8x \sec^4 8x\, dx$
10. $\int \tan^2 ax \sec^4 ax\, dx$
11. $\int \tan^2 \frac{x}{7} \sec^4 \frac{x}{7}\, dx$
12. $\int \tan^2 \frac{5x}{3} \sec^4 \frac{5x}{3}\, dx$
13. $\int \tan^3 5x \sec^3 5x\, dx$
14. $\int \tan^3 bx \sec^3 bx\, dx$

15. $\int \tan^3 \frac{x}{6} \sec^3 \frac{x}{6}\, dx$

16. $\int \tan^3 \frac{4x}{7} \sec^3 \frac{4x}{7}\, dx$

17. $\int \cot^3 bx \csc^3 bx\, dx$

18. $\int \cot^3 4x \csc^3 4x\, dx$

19. $\int \sec^6 \frac{x}{2}\, dx$

20. $\int \csc^4 \left(\frac{3\theta}{2}\right) d\theta$

21. $\int 2x^2 \sec^4 x^3\, dx$

22. $\int \left(1+\frac{1}{\text{ctg}^2 x}\right)^3 dx$

23. $\int \sec^6 \alpha \cos 2\alpha\, d\alpha$

24. $\int \frac{dt}{\cos^4 2t}$

25. $\int \csc^4 (3x-1) dx$

26. $\int \tan^5 x \sec x\, dx$

27. $\int \tan 2x \sec^3 2x\, dx$

28. $\int \text{ctg}^5 x \csc^3 x\, dx$

29. $\int \frac{\text{sen}^5 3x\, dx}{\cos^8 3x}$

30. $\int \frac{\sec^6 x\, dx}{\sqrt{\tan x}}$

31. $\int \left(\sec^4 3t - \csc^4 \left(\frac{t}{2}\right)\right) dt$

32. $\int \csc^4 (2x-1)\, dx$

33. $\int \frac{d\theta}{\text{sen}^6 \left(\frac{\theta}{5}\right)}$

34. $\int \csc^8 x\, dx$

35. $\int x(1-\tan^4 x^2)\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de la forma: $\int \text{sen}^m v\, dv$ y $\int \cos^n v\, dv$, con *m* y *n* par

En estas integrales cuando las potencias de las funciones sen x y cos x son pares, se utilizan las identidades trigonométricas del doble de un ángulo:

$$\text{sen } v \cos v = \frac{1}{2}\text{sen } 2v \quad \text{sen}^2 v = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2v \quad \cos^2 v = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2v$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \text{sen}^2 x\, dx$

Solución

Se emplea la identidad correspondiente y se integra:

$$\int \text{sen}^2 x\, dx = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2}-\frac{\text{sen } 2x}{4}+C$$

2 Determina el resultado de $\int \text{sen}^4 2x\, dx$

Solución

$$\int \text{sen}^4 2x\, dx = \int (\text{sen}^2 2x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\ 4x + \frac{1}{4}\cos^2 4x\right)dx$$

Ahora se transforma la potencia par de cos 4x, utilizando la identidad:

$$\cos^2 v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2v$$

Entonces,

$$\int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\ 4x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 8x\right)\right)dx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x\right)dx$$

Ahora bien, al integrar cada uno de los términos queda:

$$\int \text{sen}^4 2x\, dx = \frac{3}{8}x - \frac{\text{sen}\ 4x}{8} + \frac{\text{sen}\ 8x}{64} + C$$

3 Encuentra el resultado de $\int \cos^6 \frac{x}{3}\, dx$

Solución

La integral se expresa de la siguiente manera

$$\int \cos^6 \frac{x}{3}\, dx = \int \left(\cos^2 \frac{x}{3}\right)^3 dx$$

Se sustituye $\cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3}$

$$\begin{aligned}
\int \cos^6 \frac{x}{3}\, dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3}\right)^3 dx \\
&= \int \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{8}\cos^2\frac{2x}{3} + \frac{1}{8}\cos^3\frac{2x}{3}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{4x}{3}\right) + \frac{1}{8}\cos^3\frac{2x}{3}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{5}{16} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3} + \frac{1}{8}\cos^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{5}{16} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3} + \frac{1}{8}\left(1 - \text{sen}^2\frac{2x}{3}\right)\cos\frac{2x}{3}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{5}{16} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3} + \frac{1}{8}\cos\frac{2x}{3} - \frac{1}{8}\text{sen}^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3} - \frac{1}{8}\text{sen}^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\right)dx \\
&= \frac{5}{16}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos\frac{2x}{3}\, dx + \frac{3}{16}\int \cos\frac{4x}{3}\, dx - \frac{1}{8}\int \text{sen}^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\, dx
\end{aligned}$$

Se aplica el cambio de variable para cada una de las integrales,

$$v=\frac{2x}{3} \quad dv=\frac{2}{3}dx \quad z=\frac{4}{3}x \quad dz=\frac{4}{3}dx \quad w=\operatorname{sen}\frac{2x}{3}, \quad dw=\frac{2}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx$$

Entonces,

$$=\frac{5}{16}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int\cos v\,dv+\frac{3}{16}\cdot\frac{3}{4}\int\cos z\,dz-\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}\int w^2dw$$

$$=\frac{5}{16}x+\frac{3}{4}\operatorname{sen}v+\frac{9}{64}\operatorname{sen}z-\frac{3}{16}\cdot\frac{w^3}{3}+C$$

$$=\frac{5}{16}x+\frac{3}{4}\operatorname{sen}\frac{2x}{3}+\frac{9}{64}\operatorname{sen}\frac{4x}{3}-\frac{1}{16}\operatorname{sen}^3\frac{2x}{3}+C$$

EJERCICIO 11

Verifica las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen}^2 3x\,dx$
2. $\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx$
3. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{5}\,dx$
4. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{3x}{4}\,dx$
5. $\int \cos^2 5x\,dx$
6. $\int \cos^2 bx\,dx$
7. $\int \cos^2 \frac{x}{7}\,dx$
8. $\int \cos^2 \frac{7x}{2}\,dx$
9. $\int \operatorname{sen}^4 8x\,dx$
10. $\int \operatorname{sen}^4 ax\,dx$
11. $\int \operatorname{sen}^4 \frac{x}{7}\,dx$
12. $\int \operatorname{sen}^4 \frac{3x}{4}\,dx$
13. $\int \cos^4 9x\,dx$
14. $\int \cos^4 bx\,dx$
15. $\int \cos^4 \frac{x}{3}\,dx$
16. $\int \cos^4 \frac{5x}{3}\,dx$
17. $\int \operatorname{sen}^6 x\,dx$
18. $\int \operatorname{sen}^6 4x\,dx$
19. $\int \operatorname{sen}^6 ax\,dx$
20. $\int \operatorname{sen}^6 \frac{x}{4}\,dx$
21. $\int \operatorname{sen}^6 \frac{5x}{2}\,dx$
22. $\int \cos^6 x\,dx$
23. $\int \cos^6 3x\,dx$
24. $\int \cos^6 bx\,dx$
25. $\int \cos^6 \frac{x}{2}\,dx$
26. $\int \cos^6 \frac{2x}{5}\,dx$
27. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sec^5 x}$
28. $\int \operatorname{sen}^4 3x\,dx$

29. $\int \frac{dy}{\csc^4 \frac{y}{2}}$

30. $\int \frac{dx}{\csc^2 x}$

31. $\int \frac{\cos^2 3x\, dx}{1+\tan^2 3x}$

32. $\int 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

33. $\int (3-\cos\alpha)^2 d\alpha$

34. $\int (\text{sen}\, x+1)^3 dx$

35. $\int \text{sen}^2\left(\frac{x}{b}\right)\cos^2\left(\frac{x}{b}\right) dx$

36. $\int \left(\text{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right) - \sqrt{\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)}\right)^2 d\theta$

37. $\int \cos^8 x\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de la forma $\int \text{sen}\, mx \cdot \cos nx\, dx$, $\int \text{sen}\, mx \cdot \text{sen}\, nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$

En las siguientes integrales se utilizan las identidades trigonométricas:

$$\int \text{sen}\, mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

$$\int \text{sen}\, mx\, \text{sen}\, nx\, dx = -\frac{\text{sen}(m+n)\,x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)\,x}{2(m-n)} + C$$

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\text{sen}(m+n)\,x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)\,x}{2(m-n)} + C \text{, cuando } m \neq n$$

EJEMPLOS

1 Encuentra el resultado de $\int \text{sen}\, 2x \cos 4x\, dx$

Solución

$$\int \text{sen}\, 2x \cos 4x\, dx = -\frac{\cos(2+4)\,x}{2(2+4)} - \frac{\cos(2-4)\,x}{2(2-4)} + C = -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos(-2x)}{-4} + C$$

$$= -\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

2 Determina el resultado de $\int \cos 3x \cos x\, dx$

Solución

$$\begin{aligned}\int \cos 3x \cos x\, dx &= \frac{\operatorname{sen}(3+1)x}{2(3+1)} + \frac{\operatorname{sen}(3-1)x}{2(3-1)} + C \\ &= \frac{\operatorname{sen} 4x}{2(4)} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2(2)} + C \\ &= \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C\end{aligned}$$

EJERCICIO 12

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x\, dx$
2. $\int \operatorname{sen} x \cos 3x\, dx$
3. $\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} x\, dx$
4. $\int \cos 7y \cos 3y\, dy$
5. $\int \cos(5x) \operatorname{sen}(2x)\, dx$
6. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha$
7. $\int \cos\left(\frac{3}{5}w\right) \cos\left(\frac{1}{4}w\right) dw$
8. $\int \operatorname{sen}(mx+b) \operatorname{sen}(mx-b)\, dx$
9. $\int \operatorname{sen}(3x+4) \operatorname{sen}(3x-4)\, dx$
10. $\int \operatorname{sen} 3w \operatorname{sen} 2w \operatorname{sen} w\, dw$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 9

Métodos de integración

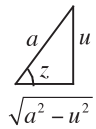
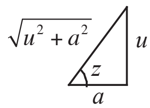
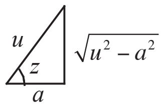
Reseña HISTÓRICA

Uno de los científicos matemáticos y físicos italianos más importantes de finales del siglo XVIII. Inventó y maduró el cálculo de variaciones y más tarde lo aplicó a una nueva disciplina, la mecánica celeste, sobre todo al hallazgo de mejores soluciones al problema de tres cuerpos. También contribuyó significativamente con la solución numérica y algebraica de ecuaciones y con la teoría numérica. En su clásica *Mecanique analytique* (*Mecánicas analíticas*, 1788), transformó la mecánica en una rama del análisis matemático. El tratado resumió los principales resultados sobre mecánica que se saben del siglo XVIII y es notable por su uso de la teoría de ecuaciones diferenciales. Otra preocupación central de Lagrange fueron los fundamentos del cálculo. En un libro de 1797 enfatizó la importancia de la serie de Taylor y el concepto de función. Sus trabajos sirvieron de base para los de Augustin Cauchy, Niels Henrik Abel, y Karl Weierstrass en el siguiente siglo.

Joseph Louis Lagrange
(1736-1813)

Sustitución trigonométrica

Algunas integrales que involucran expresiones de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$, $\sqrt{u^2+a^2}$ y $\sqrt{u^2-a^2}$, deben resolverse utilizando las siguientes transformaciones:

Caso	**Cambio**	**Diferencial**	**Transformación**	**Triángulo**
$\sqrt{a^2-u^2}$	$u = a \text{ sen } z$	$du = a \cos z \, dz$	$\sqrt{a^2-u^2} = a \cos z$	
$\sqrt{u^2+a^2}$	$u = a \tan z$	$du = a \sec^2 z \, dz$	$\sqrt{u^2+a^2} = a \sec z$	
$\sqrt{u^2-a^2}$	$u = a \sec z$	$du = a \sec z \tan z \, dz$	$\sqrt{u^2-a^2} = a \tan z$	

EJEMPLOS

1 Obtén el resultado de $\int \frac{dy}{(y^2+7)^{\frac{3}{2}}}$

Solución

Para resolver la integral se utiliza el segundo caso y se hacen los cambios propuestos, entonces

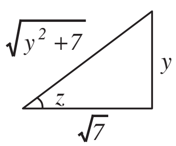
$$u^2 = y^2 \;\rightarrow\; u = y, \quad \text{luego} \quad a^2 = 7 \;\rightarrow\; a = \sqrt{7}$$

Cambiando los elementos, se sustituyen en la integral:

$$y = \sqrt{7}\tan z \qquad dy = \sqrt{7}\sec^2 z\, dz \qquad \sqrt{y^2+7} = \sqrt{7}\sec z$$

$$\int \frac{dy}{(y^2\ 1\ 7)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dy}{\left(\sqrt{y^2+7}\right)^3} = \int \frac{\sqrt{7}\sec^2 z\, dz}{\left(\sqrt{7}\sec z\right)^3} = \int \frac{dz}{7\sec z} = \frac{1}{7}\int \cos z\, dz = \frac{1}{7}\text{sen } z + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo, entonces



$$\text{sen } z = \frac{y}{\sqrt{y^2+7}}$$

Se concluye que,

$$\int \frac{dy}{\left(y^2+7\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{7\sqrt{y^2+7}} + C$$

2 Resuelve $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

Solución

$$u^2 = x^2 \quad \rightarrow \quad u = x;\, a^2 = 4 \quad \rightarrow \quad a = 2$$

Para resolver la integral se aplica el tercer caso, por tanto, los cambios se sustituyen en la integral:

$$x = 2\sec\theta,\ dx = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta$$

Entonces,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{(2\sec\theta)^3(2\sec\theta\tan\theta)}{2\tan\theta}\,d\theta = \int 8\sec^4\theta\,d\theta$$

$$= 8\int \sec^2\theta\ \sec^2\theta\,d\theta$$

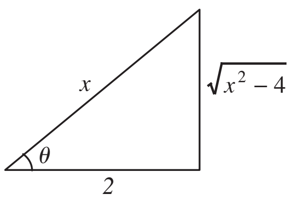
$$= 8\int (1+\tan^2\theta)\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= 8\int (\sec^2\theta + \sec^2\theta\tan^2\theta)\,d\theta$$

$$= 8\int \sec^2\theta\,d\theta + 8\int \tan^2\theta\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= 8\tan\theta + \frac{8}{3}\tan^3\theta + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo, entonces



En el triángulo

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = 8\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right) + \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^3 + C$$

$$= 4\left(\sqrt{x^2-4}\right) + \frac{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}{3} + C$$

$$= \frac{(x^2+8)\sqrt{x^2-4}}{3} + C$$

3 Determina el resultado de $\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}\,dx$

Solución

$$v^2 = 16x^2 \quad \rightarrow \quad v = 4x;\ a^2 = 25 \quad \rightarrow \quad a = 5$$

Para resolver la integral se utiliza el primer caso, donde

$$4x = 5 \operatorname{sen}\theta,\ x = \frac{5}{4}\operatorname{sen}\theta,\ dx = \frac{5}{4}\cos\theta\, d\theta \ \text{ y } \ \sqrt{25-16x^2} = 5\cos\theta$$

La nueva integral es:

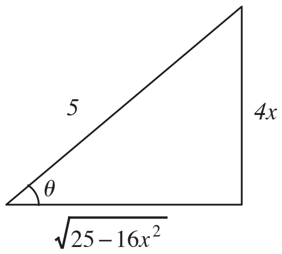
$$\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}\,dx = \int \frac{5\cos\theta}{\frac{5}{4}\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{5}{4}\cos\theta\, d\theta = 5\int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta = 5\int \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$$

$$= 5\int (\csc\theta - \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

$$= 5(\ln|\csc\theta - \cot\theta| - (-\cos\theta)) + C$$

$$= 5\ln|\csc\theta - \cot\theta| + 5\cos\theta + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo,



$$\csc\theta = \frac{5}{4x}$$

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}$$

Finalmente,

$$\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}\,dx = 5\ln\left|\frac{5}{4x} - \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x}\right| + 5\cdot\frac{\sqrt{25-16x^2}}{5} + C$$

$$= 5\ln\left|\frac{5-\sqrt{25-16x^2}}{4x}\right| + \sqrt{25-16x^2} + C$$

EJERCICIO 13

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+36}}$
2. $\int \frac{dw}{(w^2+5)^{\frac{3}{2}}}$
3. $\int \frac{y^2dy}{(y^2+3)^{\frac{3}{2}}}$
4. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$
5. $\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2+25}}$
6. $\int \frac{(36-25x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\,dx$
7. $\int \frac{\alpha^2 d\alpha}{\sqrt{4\alpha-\alpha^2}}$
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2+16}}$
9. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-16}}$
10. $\int \frac{\sqrt{5-\theta^2}}{\theta^2}d\theta$
11. $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx$
12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-x^2}}$
13. $\int \frac{y^2dy}{(9-y^2)^{\frac{3}{2}}}$
14. $\int y^3\sqrt{3-y^2}\,dy$
15. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{6x-x^2}}$
16. $\int \frac{w^3}{\sqrt{w^2+7}}\,dw$
17. $\int \frac{x^4}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$
18. $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt{x^2-11}}$
19. $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$
20. $\int \frac{\ln w}{w\sqrt{4+4\ln w-\ln^2 w}}dw$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integración por partes

Deducción de la fórmula
Sean u y v funciones, la diferencial del producto es:

$$d(uv) = u\cdot dv + v\cdot du$$

Se despeja $u\,dv$

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Al integrar la expresión se obtiene la fórmula de integración por partes,

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

Donde:

1. u es una función fácil de derivar.
2. dv es una función fácil de integrar.
3. $\int v\,du$ es más sencilla que la integral inicial.

La integral por partes se aplica en los siguientes casos:

1. Algebraicas por trigonométricas.
2. Algebraicas por exponenciales.
3. Exponenciales por trigonométricas.
4. Logarítmicas.
5. Logarítmicas por algebraicas.
6. Funciones trigonométricas inversas.
7. Funciones trigonométricas inversas por algebraicas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int x \operatorname{sen} x\,dx$

Solución

Se determinan u y dv y mediante una diferencial e integral se obtienen du y v respectivamente.

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

Se aplica la fórmula:

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

2 Determina el resultado de $\int xe^x\,dx$

Solución

Se eligen u y dv de la siguiente manera:

$$u = x \qquad dv = e^x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int e^x dx = e^x$$

Se sustituyen los datos en la fórmula, entonces,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

por tanto,

$$\int xe^x dx = e^x(x-1) + C$$

3 Encuentra el resultado de $\int \ln x\, dx$

Solución

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \int dx = x$$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = (\ln x - 1) + C$$

4 Obtén el resultado de $\int \text{arc tan } x\, dx$

Solución

$$u = \text{arc tan } x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = \int dx = x$$

Por consiguiente,

$$\int \text{arc tan } x\, dx = x \text{ arc tan } x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2}$$

La nueva integral se resuelve por cambio de variable, entonces se elige

$$w = 1 + x^2, \quad dw = 2x\, dx$$

Y el resultado es:

$$\int \text{arc tan } x\, dx = x \text{ arc tan } x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x \text{ arc tan } x - \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w}$$

$$= x \text{ arc tan } x - \frac{1}{2}\ln|w| + C$$

Por consiguiente,

$$\int \text{arc tan } x\, dx = x \text{ arc tan } x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + C$$

5 Determina el resultado de $\int e^x \cos x\, dx$

Solución

$$u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$$

$$du = e^x\, dx \qquad v = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$$

Por tanto,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

La nueva integral se resuelve integrando por partes,

$$u = e^x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

$$du = e^x\, dx \qquad v = -\cos x$$

Resulta

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x - \int -e^x \cos x\, dx\right) = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx\right)$$

Entonces,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

Se despeja $\int e^x \cos x\, dx$;

$$\int e^x \cos x\, dx + \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + C$$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + C$$

Finalmente,

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

EJERCICIO 14

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int xe^{3x} dx$
2. $\int xe^{ax} dx$
3. $\int x\, e^{\frac{x}{3}} dx$
4. $\int x \operatorname{sen} 5x\, dx$
5. $\int x \operatorname{sen} ax\, dx$
6. $\int x \operatorname{sen} \frac{x}{4}\, dx$
7. $\int x \cos 4x\, dx$
8. $\int x \cos bx\, dx$
9. $\int x \cos \frac{x}{3}\, dx$
10. $\int x^2 \ln x\, dx$
11. $\int 2x \ln x^2\, dx$
12. $\int x^5 \ln x\, dx$
13. $\int x^4 \ln 5x\, dx$
14. $\int x^n \ln x\, dx$

15. $\int x^2 e^x \, dx$

16. $\int y^2 e^{3y} \, dy$

17. $\int x^3 e^{4x} \, dx$

18. $\int x^2 \operatorname{sen} 3x \, dx$

19. $\int x^2 \operatorname{sen} bx \, dx$

20. $\int x^3 \cos \frac{x}{2} \, dx$

21. $\int x \csc^2 ax \, dx$

22. $\int y \sec^2 my \, dy$

23. $\int \operatorname{arc} \cos ax \, dx$

24. $\int \operatorname{arc} \operatorname{sen} bx \, dx$

25. $\int \operatorname{arc} \tan ax \, dx$

26. $\int \operatorname{arc} \sec mx \, dx$

27. $\int \operatorname{arc} \cot \frac{x}{n} \, dx$

28. $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta$

29. $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$

30. $\int \frac{t \, dt}{\sqrt{5t+3}}$

31. $\int \frac{x \, dx}{(ax+b)^4}$

32. $\int \frac{x^2 \, dx}{(2x+1)^5}$

33. $\int \frac{\ln(\ln y)}{y} \, dy$

34. $\int x^3 e^{2x} \, dx$

35. $\int \frac{\operatorname{arc} \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

36. $\int e^{2x} \cos x \, dx$

37. $\int (\operatorname{arc} \cos y)^2 \, dy$

38. $\int \frac{\operatorname{arc} \cos x}{x^2} \, dx$

39. $\int \frac{w^2}{\sqrt{16-w^2}} \, dw$

40. $\int \operatorname{sen}^2(\ln x) \, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integración por fracciones parciales

Integrales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios tales que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$

Caso I. El denominador tiene sólo factores de 1er grado que no se repiten
A cada factor de la forma:

$$ax + b$$

Le corresponde una fracción de la forma,

$$\frac{A}{ax+b}$$

Donde A es una constante por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{(7x+29)dx}{x^2+8x+15}$

Solución

Se factoriza el denominador

$$\frac{7x+29}{x^2+8x+15}=\frac{7x+29}{(x+5)(x+3)} \quad \rightarrow \quad \frac{7x+29}{(x+5)(x+3)}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x+3}$$

Se resuelve la fracción,

$$\frac{7x+29}{(x+5)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x+5)}{(x+5)(x+3)}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad,

$$7x+29=A(x+3)+B(x+5)$$

Se agrupan y se factorizan los términos semejantes,

$$7x+29=x(A+B)+3A+5B$$

Resultando un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} A+B=7 \\ 3A+5B=29 \end{cases}$$

la solución del sistema es:

$$A=3 \quad \text{y} \quad B=4$$

Entonces:

$$\int \frac{(7x+29)}{x^2+8x+15}dx=\int\left(\frac{3}{x+5}+\frac{4}{x+3}\right)dx=\int\frac{3}{x+5}dx+\int\frac{4}{x+3}dx=3\ln|x+5|+4\ln|x+3|+C$$

$$\int \frac{(7x+29)dx}{x^2+8x+15}=\ln\left|(x+5)^3\cdot(x+3)^4\right|+C$$

2 Obtén el resultado de $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}$

Solución

Se factoriza el denominador,

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{4x-2}{x(x^2-x-2)}=\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}$$

Se hace la equivalencia como sigue:

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$$

Se resuelve la fracción,

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+1)}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad,

$$4x-2=A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)$$

Se agrupan y se factorizan los términos semejantes,

$$4x-2=x^2(A+B+C)+x(-A+B-2C)-2A$$

Resultando un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A+B-2C=4 \\ -2A=-2 \end{cases},$$

la solución del sistema es:

$$A=1, B=1, C=-2$$

Entonces:

$$\int\frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-2}-2\int\frac{dx}{x+1} = \ln|x|+\ln|x-2|-2\ln|x+1|+C$$

$$= \ln|x|+\ln|x-2|-\ln(x+1)^2+C$$

Se aplican las leyes de los logaritmos para simplificar la expresión:

$$= \ln\frac{|x(x-2)|}{(x+1)^2}+C=\ln\frac{|x^2-2x|}{(x+1)^2}+C$$

Por consiguiente:

$$\int\frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x} = \ln\frac{|x^2-2x|}{(x+1)^2}+C$$

➡ **Caso II.** Los factores del denominador son todos de 1er grado y algunos se repiten
Si se tiene un factor de la forma $(ax+b)^n$, se desarrolla una suma como sigue:

$$\frac{A}{(ax+b)^n}+\frac{B}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{C}{(ax+b)^{n-2}}+\ldots+\frac{Z}{ax+b}$$

En donde A, B, C y Z son constantes por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de: $\int \frac{(3x^2+5x)dx}{(x-1)(x+1)^2}$

Solución

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x^2+2x+1)+B(x-1)+C(x^2-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad:

$$3x^2+5x=x^2(A+C)+x(2A+B)+A-B-C$$

Entonces se genera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+C=3 \\ 2A+B=5, \\ A-B-C=0 \end{cases}$$

su solución es:

$$A=2, B=1, C=1$$

finalmente,

$$\int\frac{(3x^2+5x)dx}{(x-1)(x+1)^2}=2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{x+1}=2\ln|x-1|-\frac{1}{x+1}+\ln|x+1|+C$$

$$=\ln\left|(x+1)(x-1)^2\right|-\frac{1}{x+1}+C$$

2 Resuelve $\int\frac{(y^4-8)}{y^3+2y^2}\,dy$

Solución

Cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, se efectúa la división.

$$\frac{y^4-8}{y^3+2y^2}=y-2+\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}$$

Entonces,

$$\int\frac{(y^4-8)dy}{y^3+2y^2}=\int\left(y-2+\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}\right)dy$$

Se separan las integrales,

$$=\int y\,dy-2\int dy+\int\frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2}=\frac{y^2}{2}-2y+\int\frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2}$$

La integral $\int \frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2}$ se resuelve mediante fracciones parciales,

$$\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}=\frac{4y^2-8}{y^2(y+2)} \quad \rightarrow \quad \frac{4y^2-8}{y^2(y+2)}=\frac{A}{y^2}+\frac{B}{y}+\frac{C}{y+2}$$

$$\frac{4y^2-8}{y^2(y+2)} = \frac{A(y+2)+By(y+2)+Cy^2}{y^2(y+2)} = \frac{y^2(B+C)+y(A+2B)+2A}{y^2(y+2)}$$

De la igualdad se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} B+C=4 \\ A+2B=0 \\ 2A=-8 \end{cases},$$

donde

$$A=-4, B=2 \text{ y } C=2$$

La integral se separa de la siguiente manera:

$$\int \frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^{2y}}=-4\int\frac{dy}{y^2}+2\int\frac{dy}{y}+2\int\frac{dy}{y+2}=\frac{4}{y}+2\ln|y|+2\ln|y+2|+C$$

$$=\frac{4}{y}+2(\ln|y|+\ln|y+2|)+C$$

$$=\frac{4}{y}+2\ln|y^2+2y|+C$$

Se concluye que,

$$\int\frac{(y^4-8)\,dy}{y^3+2y^2}=\frac{y^2}{2}-2y+\frac{4}{y}+2\ln|y^2+2y|+C$$

EJERCICIO 15

Obtén las siguientes integrales:

1. $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}dx$
2. $\int \frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x}dx$
3. $\int \frac{(x^2+11x-30)\,dx}{x^3-5x^2+6x}$
4. $\int \frac{(12+10x-2x^2)\,dx}{x^3-4x}$
5. $\int \frac{(-9x-9)\,dx}{x(x^2-9)}$
6. $\int \frac{7x^2-4}{x^3+x^2-2x}$
7. $\int \frac{(16x^2-48x+15)\,dx}{2x^3-7x^2+3x}$
8. $\int \frac{(8+3x-x^2)\,dx}{(2x+3)(x+2)^2}$
9. $\int \frac{2x^2-5x+4dx}{(x-2)^3}$
10. $\int \frac{2x^2-10x+14}{(x-3)^3}$
11. $\int \frac{(x^2+x-1)}{x^3+2x^2+x}dx$
12. $\int \frac{dy}{(y-m)(y-n)}$

13. $\int \frac{w^2 - 9w + 25}{w^2 - 9w + 20}\, dw$

14. $\int \frac{dy}{(y-3)(y-2)(y-1)}$

15. $\int \frac{3 - 5x}{x^3 - 6x^2 + 9x}\, dx$

16. $\int \frac{3\, dw}{w^3 - w}$

17. $\int \frac{(11x - 7)\, dx}{2x^2 - 3x - 2}$

18. $\int \frac{w^2 dw}{(w-6)(w^2 - 36)}$

19. $\int \frac{8x - 3}{12x^2 - 7x + 1} dx$

20. $\int \frac{(x - x^2)dx}{3x^3 + 26x^2 + 64x + 32}$

21. $\int \frac{5x^2 - 5}{x^3 - 9x^2 + 23x - 15} dx$

22. $\int \frac{2x^5 + x^4 - 39x^3 - 22x^2 + 112x + 96}{4x^3 - 25x^2 + 38x - 8}\, dx$

23. $\int \frac{dx}{16x - x^3}$

24. $\int \frac{5 - 4x}{6x - x^2 - x^3} dx$

25. $\int \frac{m}{(1-m)^2} dm$

26. $\int \frac{y\, dy}{(y+5)^2 (y-5)}$

27. $\int \frac{(x+2)dx}{x(x+6)^2}$

28. $\int \frac{x^2 + 1}{(2x-1)^3}\, dx$

29. $\int \frac{1 + x^5}{(x-1)^4}\, dx$

30. $\int \frac{x^3}{(x-3)^2 (x+3)^2} dx$

31. $\int \frac{x^3 - 1}{x^3 (x-2)^2} dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Caso III. El denominador contiene factores de segundo grado y ninguno de ellos se repite

A todo factor de la forma $ax^2 + bx + c$, le corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

En donde A y B son constantes por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}$

Solución

La expresión

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x}=\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}$$

entonces:

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{A(x^2+3)+(Bx+C)x}{x(x^2+3)}$$

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{x^2(A+B)+Cx+3A}{x(x^2+3)}$$

De la igualdad resulta el sistema:

$$\begin{cases} A+B=4 \\ C=0 \\ 3A=6 \end{cases}$$

donde

$$A=2, B=2, C=0$$

Entonces,

$$\int \frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}=\int \frac{2dx}{x}+\int \frac{(2x+0)dx}{x^2+3}=2\int \frac{dx}{x}+2\int \frac{x\,dx}{x^2+3}=2\ln|x|+\ln(x^2+3)+C$$

$$=\ln x^2+\ln(x^2+3)+C$$

$$=\ln x^2(x^2+3)+C$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}=\ln x^2(x^2+3)+C$$

2 Determina el resultado de $\int \frac{(x^2+x)}{(x-3)(x^2+1)}\,dx$

Solución

Se realiza la separación mediante fracciones parciales,

$$\frac{x^2+x}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-3)}{(x-3)(x^2+1)}$$

$$=\frac{A(x^2+1)+Bx^2-3Bx+Cx-3C}{(x-3)(x^2+1)}$$

$$\frac{x^2+x}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{x^2(A+B)+x(-3B+C)+A-3C}{(x-3)(x^2+1)}$$

De la igualdad resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3B+C=1 \\ A-3C=0 \end{cases}$$

donde

$$A=\frac{6}{5},\ B=-\frac{1}{5}\text{ y } C=\frac{2}{5}$$

Al sustituir en la integral, se obtiene:

$$\int\frac{(x^2+x)dx}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{6}{5}\int\frac{dx}{x-3}+\int\frac{\left(-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{6}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{5}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{6}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{10}\ln(x^2+1)+\frac{2}{5}\arctan x+C$$

$$=\ln\left|\frac{(x-3)^{\frac{6}{5}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{10}}}\right|+\frac{2}{5}\arctan x+C$$

Finalmente:

$$\int\frac{(x^2+x)}{(x-3)(x^2+1)}dx = \ln\left|\frac{(x-3)^{\frac{6}{5}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{10}}}\right|+\frac{2}{5}\arctan x+C$$

Caso IV. Los factores del denominador son todos de segundo grado y algunos se repiten
Si existe un factor de segundo grado de la forma

$$(ax^2+bx+c)^n$$

Se desarrolla una suma de n fracciones parciales, de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{Vx+W}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{Yx+Z}{(ax^2+bx+c)^n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int \frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2}$

Solución

Se realiza la separación mediante fracciones parciales:

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x^3+2x)+(Dx+E)x}{x(x^2+2)^2}$$

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{A(x^4+4x^2+4)+(Bx^4+2Bx^2+Cx^3+2Cx)+(Dx^2+Ex)}{x(x^2+2)^2}$$

Se agrupan términos semejantes,

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{x^4(A+B)+Cx^3+x^2(4A+2B+D)+x(2C+E)+4A}{x(x^2+2)^2}$$

De la igualdad anterior se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+2B+D=4 \\ 2C+E=2 \\ 4A=8 \\ C=0 \end{cases}$$

donde

$$A=2, B=-2, C=0, D=0 \text{ y } E=2$$

La integral se puede separar en:

$$\int\frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2}=2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2x\,dx}{x^2+2}+2\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

$$= 2\ln|x|-\ln|x^2+2|+2\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

La última integral se resuelve por sustitución trigonométrica y el resultado es:

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}=\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{4(x^2+2)}+C$$

Este resultado se sustituye en la integral.

$$\int\frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2}=\ln|x^2|-\ln|x^2+2|+2\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{4(x^2+2)}\right)+C$$

Entonces se concluye que:

$$\int\frac{(4x^2+2x+8)\,dx}{x(x^2+2)^2} = \ln\left|\frac{x^2}{x^2+2}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)+\frac{x}{2x^2+4}+C$$

2 Encuentra el resultado de $\int \frac{x^5dx}{(x^2+4)^2}$

Solución

Como el numerador es más grande en grado que el denominador, se realiza la división,

$$\frac{x^5}{(x^2+4)^2} = x - \frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}$$

Entonces la integral se puede expresar de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^5dx}{(x^2+4)^2} = \int xdx - \int \frac{(8x^3+16x)\,dx}{(x^2+4)^2}$$

La integral

$$\int \frac{(8x^3+16x)\,dx}{(x^2+4)^2}$$

se realiza por fracciones parciales,

$$\frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+4)+Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{Ax^3+Bx^2+x(4A+C)+4B+D}{(x^2+4)^2}$$

De la cual se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A=8 \\ B=0 \\ 4A+C=16 \\ 4B+D=0 \end{cases}$$

donde $A = 8$, $B = 0$, $C = -16$ y $D = 0$

$$\int \frac{(8x^3+16x)dx}{(x^2+4)^2} = 8\int \frac{x\,dx}{x^2+4} - 16\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^2} = 4\ln\left|x^2+4\right| + \frac{8}{x^2+4}$$

Finalmente, este resultado se sustituye en la integral

$$\int \frac{x^5dx}{(x^2+4)^2} = \int xdx - \int \frac{(8x^3+16x)dx}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{2} - \left(4\ln\left|x^2+4\right| + \frac{8}{x^2+4}\right) + C$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4\ln\left|x^2+4\right| - \frac{8}{x^2+4} + C$$

EJERCICIO 16

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dm}{m^3 + m^2}$

2. $\int \frac{dm}{m^3 + m}$

3. $\int \frac{x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 8}{x^3 - 6x} dx$

4. $\int \frac{(2x^5 + x^4 + 37x^3 + 28x^2 + 171x + 162)}{x(x^2 + 9)^2} dx$

5. $\int \frac{8\ dy}{y^4 - 16}$

6. $\int \frac{x^4 - 1}{x^3 - x^2 + 9x - 9} dx$

7. $\int \frac{4x^2 + 48}{16 - x^4} dx$

8. $\int \frac{y^3 + 5y}{(y^2 + 1)^2} dy$

9. $\int \frac{x^3 + 4}{x^4 - 5x^2 + 4} dx$

10. $\int \frac{dx}{x^3 - 8}$

11. $\int \frac{y^5}{1 - y^4} dy$

12. $\int \frac{2x^3 + 9x^2 + 14x + 8}{(x^2 + 2x)(x^2 + 2)} dx$

13. $\int \frac{(5x^4 - x^3 + 8x^2 - 4x + 4)}{(x^2 + 1)^2 (x - 1)} dx$

14. $\int \frac{(3x^2 + 5x - 1)}{(x^2 + 2x - 1)^2} dx$

15. $\int \frac{x^2 - 5x + 3}{(x^2 - 6x + 8)^2} dx$

16. $\int \frac{dx}{(x + 2)(x^2 + 2x + 4)^2}$

17. $\int \frac{(4x^4 + x^3 + 30x^2 + 7x + 49)}{(x^2 + 4)^2 (x + 1)} dx$

18. $\int \frac{(3x^4 + x^3 + 22x^2 + 5x + 50)}{x(x^2 + 5)^2} dx$

19. $\int \frac{dx}{x^2 (x^2 + 5)^2}$

20. Demuestra que $\int \frac{3x^5 + 13x^4 + 32x^3 + 8x^2 - 40x - 75}{x^2 (x^2 + 3x + 5)^2} dx$ equivale a:

$$= \frac{1}{2} \ln \left| x^4 (x^2 + 3x + 5) \right| - \frac{35\sqrt{11}}{121} \text{arc tan} \left(\frac{\sqrt{11}(2x + 3)}{11} \right) + \frac{3}{x} - \frac{4(3x + 10)}{11(x^2 + 3x + 5)} + C$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integración por sustitución de una nueva variable

Algunas integrales que contienen exponentes fraccionarios o radicales no se pueden integrar de manera inmediata; por lo anterior se hace una sustitución por una nueva variable, de tal modo que la integral que resulte se pueda integrar por alguno de los métodos estudiados.

Diferenciales que contienen potencias fraccionarias de x

Una integral que contenga potencias fraccionarias de x, se puede transformar a otra mediante la sustitución:

$$x = w^n$$

Donde n es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes fraccionarios.

Ejemplo

Demuestra que $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} - 1\right| + C$

Solución

Se obtiene el menor denominador común que en este caso es 4, por lo que la sustitución es:

$$x = w^4$$

Luego,

$$x^{\frac{1}{2}} = w^2, \ x^{\frac{1}{4}} = w \quad \text{y} \quad dx = 4w^3 dw$$

Por tanto, la nueva integral resulta:

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = \int \frac{4w^3 dw}{w^2 - w}$$

Se integra,

$$\int \frac{4w^3}{w^2 - w} dw = 4\int \left(w + 1 + \frac{w}{w^2 - w} \right) dw = 4\int w dw + 4\int dw + 4\int \frac{w dw}{w^2 - w}$$

$$= \frac{4w^2}{2} + 4w + 4\int \frac{w\,dw}{w(w-1)}$$

$$= 2w^2 + 4w + 4\int \frac{dw}{w-1} + C$$

$$= 2w^2 + 4w + \ln|w - 1| + C$$

Pero $w = x^{\frac{1}{4}}$, se demuestra que $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} - 1\right| + C$

Diferenciales que contienen potencias fraccionarias de $a + bx$

Una integral que contenga potencias fraccionarias de $a + bx$, se puede transformar en otra, mediante la sustitución:

$$a + bx = w^n$$

Donde n es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes fraccionarios.

EJEMPLOS

1 Demuestra que $\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1 + (x+1)^{\frac{2}{3}}} dx = (x + 1) - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3 \text{ arc tan} \sqrt[3]{x+1} + C$

Solución

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores de las potencias fraccionarias y se realiza el cambio,

$$x + 1 = w^3$$

donde $dx = 3w^2\,dw \quad \text{y} \quad (x+1)^{\frac{2}{3}} = w^2,$

Por tanto, la nueva integral resulta,

$$\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1+(x+1)^{\frac{2}{3}}}\,dx \quad \int \frac{w^2}{1+w^2}(3w^2dw) = 3\int \frac{w^4}{w^2+1}\,dw$$

Se resuelve la división y se integra:

$$3\int \frac{w^4}{w^2+1}\,dw = 3\int\left(w^2-1+\frac{1}{w^2+1}\right)dw = 3\int w^2dw - 3\int dw + 3\int \frac{dw}{w^2+1}$$

$$= w^3 - 3w + 3 \text{ arc tan } w + C$$

$x + 1 = w^3$, entonces $w = (x+1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+1}$, por consiguiente se deduce que:

$$\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1+(x+1)^{\frac{2}{3}}}\,dx = (x+1) - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3 \text{ arc tan}\sqrt[3]{x+1} + C$$

2 Demuestra que $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+3}}\,dx = 2\sqrt{x+3} - \ln\left|\frac{x+4-2\sqrt{x+3}}{x+2}\right| + C$

Solución

La sustitución que se realiza es:

$$w^2 = x + 3$$

donde,

$$x + 1 = w^2 - 2,\; x + 2 = w^2 - 1 \quad \text{y} \quad dx = 2w\,dw$$

Por tanto, la nueva integral resulta:

$$\int \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+3}}\,dx = \int \frac{(w^2-2)}{(w^2-1)(w)}(2w\,dw) = 2\int \frac{w^2-2}{w^2-1}\,dw$$

Ahora bien, al resolver la división e integrar, se obtiene:

$$2\int \frac{w^2-2}{w^2-1}\,dw = 2\int\left(1-\frac{1}{w^2-1}\right)dw = 2\int dw - 2\int \frac{dw}{w^2-1} = 2w - \ln\left|\frac{w-1}{w+1}\right| + C$$

$w^2 = x + 3$, entonces $w = \sqrt{x+3}$ y al sustituir se obtiene:

$$= 2\sqrt{x+3} - \ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}\right| + C$$

Se racionaliza,

$$= 2\sqrt{x+3} - \ln\left|\frac{x+4-2\sqrt{x+3}}{x+2}\right| + C$$

Por consiguiente, se comprueba que:

$$\int \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+3}}\,dx = 2\sqrt{x+3} - \ln\left|\frac{x+4-2\sqrt{x+3}}{x+2}\right| + C$$

EJERCICIO 17

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \frac{3x^{\frac{1}{3}}dx}{1+x^{\frac{2}{3}}}$

2. $\int \frac{x^{\frac{1}{5}}dx}{1+x^{\frac{3}{5}}}$

3. $\int \frac{x\,dx}{(3x+1)^{\frac{1}{3}}}$

4. $\int \frac{x}{3\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}}dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)}$

6. $\int \frac{x^{\frac{1}{6}}dx}{\sqrt{4+x^{\frac{1}{3}}}}$

7. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}$

8. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}+2}$

9. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}-3}$

10. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2x^{\frac{1}{3}}+1}$

11. $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{x}(x+5)}$

12. $\int \frac{dx}{(x-3)^{\frac{1}{2}}+(x-3)^{\frac{1}{4}}}$

13. $\int \frac{(t-1)\,dt}{t\sqrt{t+2}}$

14. Demuestra que $\int \frac{(x+2)^{\frac{1}{6}}\,dx}{\sqrt{(x+2)^{\frac{1}{3}}+1}}$ equivale a:

$$\left[(x+2)^{\frac{1}{3}}+1\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{8(x+2)^{\frac{5}{6}}-10(x+2)^{\frac{1}{2}}+15(x+2)^{\frac{1}{6}}}{8}\right]-\frac{15}{8}\ln\left|(x+2)^{\frac{1}{6}}+\sqrt{(x+2)^{\frac{1}{3}}+1}\right|+C$$

15. Demuestra que $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{3}}}$ equivale a:

$$\sqrt[12]{x}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{7}{12}}-\frac{12}{7}x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{5}{12}}-\frac{12}{5}x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{4}}-4x^{\frac{1}{6}}+6x^{\frac{1}{12}}-12\right)+12\ln\left|x^{\frac{1}{12}}+1\right|+C$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integración de las diferenciales binomias

Son aquellas integrales que contienen expresiones de la forma $x^w(a+bx^t)^{\frac{p}{q}}$ con $t > 0$ y se reducen mediante los cambios de variable que se indican:

Caso I

Si $\frac{w+1}{t}=L$ con $L \in Z$ su cambio de variable es:

$$u=(a+bx^t)^{\frac{1}{q}}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\int \frac{x^2\,dx}{(4+x^3)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}\sqrt{4+x^3}+C$

Solución

En la integral se observa que

$$w=2,\ t=3,\ p=-1 \text{ y } q=2$$

entonces,

$$\frac{w+1}{t}=\frac{2+1}{3}=1,\quad 1\in Z$$

Por tanto, el cambio de variable es:

$$u=(4+x^3)^{\frac{1}{2}} \quad \text{donde} \quad u^2=4+x^3$$

Se despeja la variable x y se determina la diferencial,

$$x=(u^2-4)^{\frac{1}{3}} \quad \text{y} \quad dx=\frac{2}{3}u(u^2-4)^{-\frac{2}{3}}\,du$$

Al sustituir en la integral, se obtiene:

$$\int \frac{x^2dx}{(4+x^3)^{\frac{1}{2}}}=\int x^2(4+x^3)^{-\frac{1}{2}}dx=\int (u^2-4)^{\frac{2}{3}}(u^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{3}u(u^2-4)^{-\frac{2}{3}}\,du$$

$$=\frac{2}{3}\int du=\frac{2}{3}u+C$$

Pero

$$u=(4+x^3)^{\frac{1}{2}}$$

por consiguiente:

$$\int \frac{x^2dx}{\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}\sqrt{4+x^3}+C$$

2 Comprueba que $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}(2x^2-3)}{20} + C$

Solución

En esta integral

$$w = 3,\ t = 2,\ p = -1 \text{ y } q = 3$$

entonces

$$\frac{w+1}{t} = \frac{3+1}{2} = 2\ ,\ 2 \in Z$$

El cambio de variable es,

$$u = (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \quad \text{donde} \quad u^3 = 1 + x^2$$

Se despeja la variable x y se determina la diferencial,

$$x = (u^3-1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad dx = \frac{3u^2}{2\sqrt{u^3-1}}\,du$$

Se sustituye en la integral y se obtiene:

$$\int \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \int x^3(1+x^2)^{-\frac{1}{3}}dx = \int (u^3-1)^{\frac{3}{2}}(u^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{3u^2}{2\sqrt{u^3-1}}\,du$$

$$= \frac{3}{2}\int (u^3-1)u\,du = \frac{3}{10}u^5 - \frac{3}{4}u^2 + C$$

Pero $u = (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$, por tanto, al sustituir y simplificar el resultado

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{10}(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{5}(x^2+1) - \frac{1}{2}\right) + C$$

$$= \frac{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}(2x^2-3)}{20} + C$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}(2x^2-3)}{20} + C$$

Caso II

Si $\frac{w+1}{t}+\frac{p}{q}=L$, $L \in Z$ el cambio de variable es:

$$u=\left(\frac{a+bx^t}{x^t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Ejemplo

Demuestra que:

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}=-\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{x}+C$$

Solución

En esta integral

$$w=-2,\ t=4,\ p=-3 \ \text{ y } \ q=4$$

entonces,

$$\frac{w+1}{t}+\frac{p}{q} = \frac{-2+1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-1$$

Por consiguiente, el cambio de variable es,

$$u=\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{donde} \quad x=\frac{1}{\sqrt[4]{u^4-1}} \quad \text{y} \quad dx=\frac{-u^3\,du}{\left(u^4-1\right)^{\frac{5}{4}}}$$

Al sustituir en la integral se obtiene,

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}=\int x^{-2}(1+x^4)^{-\frac{3}{4}}dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt[4]{u^4-1}}\right)^{-2}\left(\frac{u^4}{u^4-1}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{-u^3du}{\left(u^4-1\right)^{\frac{5}{4}}}\right)=-\int du=-u+C$$

Pero $u=\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}$, entonces de acuerdo con el resultado anterior

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{x} + C$$

EJERCICIO 18

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \frac{y^3\, dy}{(2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$
2. $\int x^3\sqrt{7-5x^2}\, dx$
3. $\int \frac{x^5\, dx}{(9+x^3)^{\frac{5}{4}}}$
4. $\int x^3(3+4x^2)^{\frac{2}{3}}\, dx$
5. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$
6. $\int \frac{(4+3x^4)^{\frac{3}{2}}\, dx}{x}$
7. $\int \frac{5\, dx}{x(x^5+16)^{\frac{1}{4}}}$
8. $\int \frac{dx}{x^2(4-x^4)^{\frac{3}{4}}}$
9. $\int x^2(3+x)^{\frac{5}{3}}\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformaciones de diferenciales trigonométricas

Aquellas integrales que tengan una forma racional, cuyos elementos sean funciones trigonométricas seno y coseno, se emplean las siguientes sustituciones, mediante la transformación:

De la identidad trigonométrica,

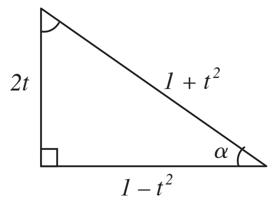
$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Se realiza el cambio $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=t$

$$t^2=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Se despeja $\cos\alpha$, $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Dada la función trigonométrica $\cos\alpha$, se completa el triángulo rectángulo de la siguiente figura:



Por tanto, $\operatorname{sen}\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$ $\qquad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

luego, $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=t$ entonces $d\alpha=2\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{d\alpha}{3-2\cos\alpha}$

Solución

Se emplea el cambio

$$d\alpha = 2\left(\frac{dt}{1+t^2}\right) \quad \text{y} \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

se sustituye en la integral

$$\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3-2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{5t^2+1}{1+t^2}}dt = 2\int \frac{dt}{5t^2+1} = \frac{2}{5}\left[\sqrt{5}\ \text{arc tan}\left(\sqrt{5}\,t\right)\right] + C$$

Pero $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, por tanto, se deduce que,

$$\int \frac{d\alpha}{3-2\cos\alpha} = \frac{2}{5}\left[\sqrt{5}\ \text{arc tan}\left(\sqrt{5}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right] + C$$

2 Obtén el resultado de $\int \frac{d\theta}{5\,\text{sen}\,\theta - 1}$

Solución

Se sustituye

$$d\theta = 2\left(\frac{dt}{1+t^2}\right) \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

en la integral

$$\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)-1}dt = 2\int \frac{dt}{-t^2+10t-1} = -2\int \frac{dt}{(t-5)^2-24} = -\frac{\sqrt{6}}{12}\ln\left|\frac{t-2\sqrt{6}-5}{t+2\sqrt{6}-5}\right| + C$$

Pero $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, por tanto, se concluye que,

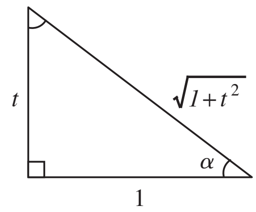
$$\int \frac{d\theta}{5\,\text{sen}\,\theta - 1} = -\frac{\sqrt{6}}{12}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)-2\sqrt{6}-5}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+2\sqrt{6}-5}\right| + C$$

Fórmulas equivalentes de transformación

Otro cambio que se emplea en las integrales en forma racional que contienen funciones trigonométricas seno y coseno es:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \tan\alpha=t \quad \text{y} \quad d\alpha=\frac{dt}{1+t^2}$$

Cuyo triángulo es,



Se recomienda utilizar estas sustituciones cuando se tienen las expresiones: $\operatorname{sen}^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\displaystyle\int\frac{dy}{(5-\operatorname{sen}y)(5+\operatorname{sen}y)}$

Solución

La integral es equivalente a

$$\int\frac{dy}{25-\operatorname{sen}^2 y}$$

Entonces,

$$dy=\frac{dt}{1+t^2}\ ;\ \operatorname{sen}y=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Al sustituir en la integral, se obtiene,

$$\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{25-\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{24t^2+25}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{24t^2+25}=\frac{\sqrt{6}}{60}\arctan\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}t\right)+C$$

Pero $\tan y=t$, por tanto, se concluye que,

$$\int\frac{dy}{(5-\operatorname{sen}y)(5+\operatorname{sen}y)}=\frac{\sqrt{6}}{60}\arctan\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\tan y\right)+C$$

2 Determina el resultado de $\int \frac{(\tan^3 x + 1)\, dx}{3\cos^2 x - 2\text{sen}\, x \cos x + \text{sen}^2 x}$

Solución

Se sustituyen las equivalencias en la integral y se simplifican:

$$\int \frac{\left(\tan^3 x + 1\right) dx}{3\cos^2 x - 2\,\text{sen}\, x \cos x + \text{sen}^2 x} = \int \frac{\left(t^3+1\right)\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)}{3\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) + \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}$$

$$= \int \frac{\frac{(1+t^3)}{1+t^2}\, dt}{\frac{3}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{(1+t^3)}{1+t^2} dt}{\frac{3-2t+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{(t^3+1)\, dt}{t^2-2t+3}$$

La integral resultante se expresa de la siguiente manera,

$$\int \frac{(t^3+1)dt}{t^2-2t+3} = \int \left(t + 2 + \frac{t-5}{t^2-2t+3}\right) dt$$

Se resuelve cada una de las integrales,

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \int \frac{t-1-4}{t^2-2t+3}\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \int \frac{t-1}{t^2-2t+3}\, dt - 4\int \frac{dt}{t^2-2t+3}$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \frac{1}{2}\ln\left|t^2-2t+3\right| - 4\int \frac{dt}{(t-1)^2+2}$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \frac{1}{2}\ln\left|t^2-2t+3\right| - 4\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc tan}\,\frac{t-1}{\sqrt{2}} + C$$

Pero $t = \tan x$, entonces:

$$\frac{1}{2}\tan^2 x + 2\tan x + \frac{1}{2}\ln\left|\tan^2 x - 2\tan x + 3\right| - 2\sqrt{2}\,\text{arc tan}\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

EJERCICIO 19

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \frac{d\theta}{4+5\cos\theta}$
2. $\int \frac{d\theta}{1+2\cos\theta}$
3. $\int \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha+8\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$
4. $\int \frac{dx}{1-\cos x+\operatorname{sen} x}$
5. $\int \frac{3}{(1+\operatorname{sen}\beta)^2}\,d\beta$
6. $\int \frac{dw}{\operatorname{sen} w+\cos w-1}$
7. $\int \frac{d\theta}{1-\operatorname{tg}\theta}$
8. $\int \frac{d\theta}{3\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}$
9. $\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta+\operatorname{sen} 2\theta}$
10. $\int \frac{d\theta}{4\sec\theta-1}$
11. $\int \frac{d\alpha}{6-3\operatorname{sen}\alpha+4\cos\alpha}$
12. $\int \frac{dx}{2+3\sec x}$
13. $\int \frac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}\,d\beta$
14. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}\,d\theta$
15. $\int \frac{3\operatorname{sen}\theta+4\cos\theta}{4\operatorname{sen}\theta-3\cos\theta}\,d\theta$
16. $\int \frac{dw}{\operatorname{sen}^2 w-5\operatorname{sen} w\cdot\cos w+\cos^2 w}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 10

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Reseña HISTÓRICA

Matemático francés, Cauchy fue pionero en el análisis y la teoría de permutación de grupos. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

En 1814 publicó la memoria de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas. Gracias a Cauchy el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.

Cauchy precisa los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual, toma el concepto de límite como punto de partida del análisis y elimina de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos ahora otorgan rigor a los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que queda eliminada, en especial cuando más tarde sufre un rudo golpe al demostrarse que hay funciones continuas sin derivadas, es decir: curvas sin tangente.

Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)

Constante de integración

Dada la integral indefinida $\int f'(x)\,dx = F(x) + C$, representa la familia de funciones de $F(x)$ donde C recibe el nombre de constante de integración.

EJEMPLOS

1 Determina la función cuya derivada sea e^{2x}

Solución

La derivada de la función que se busca es:

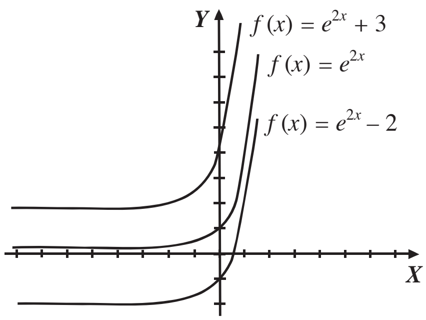
$$f'(x) = e^{2x}$$

Se integra $f'(x)$ para obtener $f(x)$

$$f(x) = \int e^{2x}\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Si $C = -2, 0, 2$ se obtiene una famila de curvas para $f(x)$,



Finalmente, la función que se busca es: $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

2 Determina la ecuación de la curva, cuya pendiente de la recta tangente en el punto (4, 5) es $y' = \sqrt{2x+1}$

Solución

Se integra $y' = \sqrt{2x+1}$

$$y = \int \sqrt{2x+1}\,dx \quad \rightarrow \quad y = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Al sustituir las coordenadas del punto (4, 5) se obtiene el valor de C,

$$5 = \frac{(2(4)+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C \quad \rightarrow \quad 5 = 9 + C \quad \rightarrow \quad C = -4$$

De acuerdo con el resultado anterior, la ecuación de la curva es:

$$y = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4$$

3 Encuentra la ecuación de la curva cuya pendiente de la recta tangente en el punto (3, 1) es igual a $2xy$

Solución

La derivada es implícita, entonces,

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

Ahora, se agrupan las variables,

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

Se integra la expresión y se obtiene:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \quad \rightarrow \quad \ln y = x^2 + C$$

Al sustituir las coordenadas del punto (3, 1), se encuentra el valor de la constante de integración,

$$\ln 1 = 3^2 + C \quad \rightarrow \quad 0 = 9 + C \quad \rightarrow \quad C = -9$$

Por consiguiente, la ecuación de la curva es:

$$\ln y = x^2 - 9 \quad \rightarrow \quad y = e^{x^2 - 9}$$

4 Una motocicleta viaja a razón de $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y acelera a un ritmo de $(3t - 5)\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Determina la velocidad a la que viaja la motocicleta al transcurrir 4 segundos.

Solución

La aceleración se define como $\frac{dv}{dt} = a$, entonces, $dv = a\,dt$

Integrando esta expresión, se obtiene la velocidad v

$$\int dv = \int (3t - 5)\,dt \quad \rightarrow \quad v = \frac{3}{2}t^2 - 5t + C$$

Para un tiempo inicial $t = 0$, la velocidad de la motocicleta es $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, estos datos se sustituyen en la función para obtener el valor de C.

$$10 = \frac{3}{2}(0)^2 - 5(0) + C \quad \text{donde} \quad C = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Por consiguiente, $v = \frac{3}{2}t^2 - 5t + 10$, luego, la velocidad de la motocicleta al cabo de 4 segundos es:

$$v = \frac{3}{2}(4)^2 - 5(4) + 10 = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

EJERCICIO 20

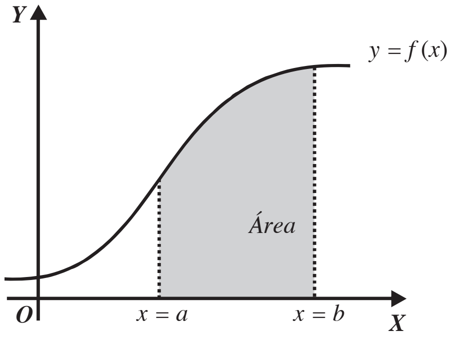
1. La pendiente de la recta tangente a una curva es $x + 3$. Obtén la ecuación de la curva si pasa por el punto $(2, 4)$
2. La derivada de una función está dada como $f'(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Encuentra $f(x)$ si ésta contiene al punto de coordenadas $(2\pi, 1)$
3. Una curva pasa por el punto $(3, e^3)$ y su derivada en este punto es igual a xe^x. Determina la ecuación de dicha curva.
4. Precisa la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(\frac{2a}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y cuya derivada en este punto es $\frac{\sqrt{4a^2 - 9x^2}}{x^2}$
5. Determina la ecuación de la curva, cuya derivada es $\frac{dx}{dy} = 3y^2 - 4y$ cuando pasa por el punto $\left(-\frac{19}{8}, \frac{1}{2}\right)$
6. Obtén la ecuación de la curva que pasa por el punto $(-\ln 4, 1)$ y cuya derivada es $x' = -\frac{3y^2 - 12y + 3}{(2 - y)^2(y + 1)}$
7. Precisa la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(5, \frac{2}{3}\right)$ y cuya pendiente de la recta tangente en este punto es $y' = x\sqrt{x^2 - 9}$
8. Encuentra la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(\frac{5}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ y cuya derivada en dicho punto es $x' = \operatorname{sen}^4 \frac{y}{2}$
9. La derivada de una función es $\frac{y + 3}{2 - x}$. Encuentra la función cuando pasa por el punto $(-3, -1)$.
10. La pendiente de la recta tangente a una curva en el punto $(0, 4)$ es $\frac{2x^2y}{x^2 + 1}$. Encuentra la ecuación de la curva.
11. La derivada de una función en el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ es $x^2 \operatorname{sen}^2 y$. Obtén la función.
12. Determina la función del desplazamiento de una partícula que lleva una velocidad constante de 11 m/s y al transcurrir 8 segundos se desplazó 73 m.
13. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba y 3 segundos después su velocidad es de 30.6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcula la velocidad del lanzamiento.
14. Una partícula parte del reposo y se mueve con una aceleración de $(t + 2)\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, para un tiempo de 4 segundos su velocidad es de 12 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Determina la distancia recorrida en este tiempo.
15. En un proceso de enfriamiento, conforme transcurre el tiempo, la rapidez de pérdida de temperatura (T) es el cuádruplo de los t minutos transcurridos. Si al principio del proceso el material tenía una temperatura de 64° C, determina la temperatura al transcurrir t minutos.
16. Desde lo alto de un edificio se deja caer un objeto y tarda 6 segundos en llegar al suelo. Calcula la altura del edificio.
17. Desde la parte más alta de una torre se arroja hacia abajo un cuerpo con una velocidad de 8 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y tarda 3.2 segundos en tocar al suelo. Calcula la altura de la torre y la velocidad con la que choca el cuerpo contra el suelo.

    Nota: $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integral definida

Representa el área que forma la función $f(x)$ con el eje X en el intervalo $[a, b]$.



Teorema fundamental

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$a =$ límite inferior
$b =$ límite superior

Cálculo de una integral definida

a) Se integra la diferencial de la función.
b) Se sustituye la variable de la integral que se obtuvo, por los límites superior e inferior, y los resultados se restan para obtener el valor de la integral definida.

Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\left[F(b) - F(a)\right]$ donde c es una constante

3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ con $c \in [a, b]$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\int_0^a (a^2 - x^2)dx = \dfrac{2a^3}{3}$

Solución

Se integra, $\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \left[a^2x - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^a$

se sustituyen los límites

$$= \left[a^2(a) - \frac{a^3}{3}\right] - \left[a^2(0) - \frac{0^3}{3}\right] = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

2 Demuestra que: $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = \frac{4}{3}$

Solución

Se integra y se sustituyen los límites,

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\right]_2^6 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3(6)-2} - \frac{2}{3}\sqrt{3(2)-2}\right] = \left[\frac{2}{3}(4) - \frac{2}{3}(2)\right] = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

3 Verifica que la integral definida $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi - 2}{8}$

Solución

Se integra la expresión

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Se sustituyen los límites

$$\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2(0)\right]$$

$$= \left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[0 - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(0)\right] = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}$$

Finalmente tenemos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi - 2}{8}$$

4 Demuestra que: $\int_1^e x \ln x\, dx = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$

Solución

Se integra por partes,

$$\int_1^e x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]_1^e$$

Se sustituyen los límites,

$$\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]_1^e = \left[\frac{e^2}{2}\left(\ln e - \frac{1}{2}\right)\right] - \left[\frac{1^2}{2}\left(\ln 1 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{e^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

Por consiguiente,

$$\int_1^e x \ln x\, dx = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

5 Calcula el valor de la integral $\int_0^4 2^{\frac{x}{2}}\, dx$

Solución

Se integra y se sustituyen los límites:

$$\int_0^4 2^{\frac{x}{2}}\, dx = \left[\frac{2^{\frac{x}{2}+1}}{\ln 2}\right]_0^4 = \left[\frac{2^{\frac{4}{2}+1}}{\ln 2}\right] - \left[\frac{2^{\frac{0}{2}+1}}{\ln 2}\right] = \frac{8}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} = \frac{6}{\ln 2}$$

EJERCICIO 21

Determina el valor de las siguientes integrales:

1. $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx$
2. $\int_{-2}^2 (x+5)\,dx$
3. $\int_0^4 \left(\sqrt{x} + 3x\right)dx$
4. $\int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 3)\,dx$
5. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\,dx$
6. $\int_0^{\pi} 3\operatorname{sen} x\,dx$
7. $\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x^2 - 4}$
8. $\int_e^4 \frac{dx}{2x}$
9. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sqrt{1 + \cos x}\,dx$
10. $\int_{-1}^2 \frac{x\,dx}{x^2 + 4}$
11. $\int_{-2}^3 e^{\frac{x}{2}}\,dx$
12. $\int_1^5 xe^x\,dx$
13. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x \operatorname{sen} x\,dx$
14. $\int_3^6 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$
15. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$
16. $\int_e^{e^2} \frac{\cos(\ln x)\,dx}{x}$
17. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$
18. $\int_3^5 \frac{(7x - 11)\,dx}{x^2 - 3x + 2}$
19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$
20. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^3(2x)\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Área bajo la curva

El área limitada por la curva $y = f(x)$ continua en $[a, b]$, el eje X y las rectas $x = a$, $x = b$, es:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$$

El área limitada por la curva $x = f(y)$ continua en $[c, d]$, el eje Y y las rectas $y = c$, $y = d$, es:

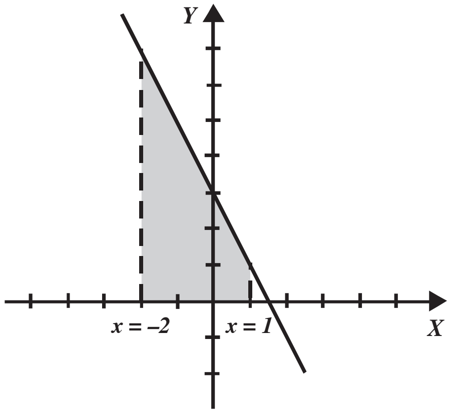
$$\text{Área} = \int_c^d f(y)\,dy = \int_c^d x\,dy$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el área limitada por la recta $y = -2x + 3$ desde $x = -2$ hasta $x = 1$

Solución



$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (-2x+3)\,dx = \left[-x^2+3x\right]_{-2}^{1}$$

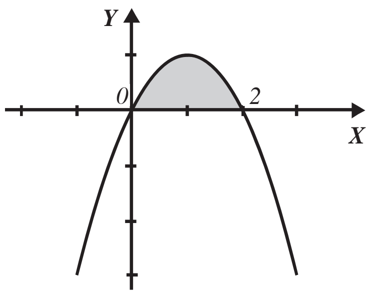
$$= [-(1)^2+3(1)] - [-(-2)^2+3(-2)]$$

$$= 2-(-10) = 12u^2$$

2 Encuentra el área comprendida entre la curva $y = 2x - x^2$ y el eje X

Solución

Se buscan los puntos de intersección de la curva con el eje X,



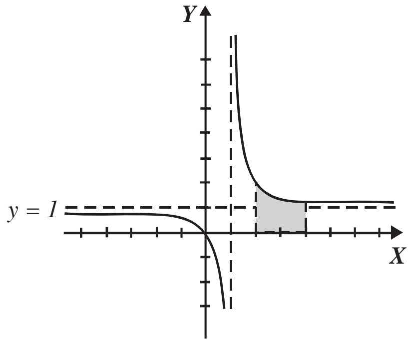
$$2x - x^2 = 0,\ x(2-x) = 0 \quad \text{donde} \quad x = 0,\ x = 2$$

$$\text{Área} = \int_{0}^{2} (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$\text{Área} = \left[(2)^2 - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[(0)^2 - \frac{(0)^3}{3}\right] = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}u^2$$

3 Determina el área limitada por el eje X, la curva $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ y las rectas $x = 2$ y $x = 4$

Solución



$$\text{Área} = \int_2^4 \frac{x}{x-1}\,dx = \left[x + \ln(x-1)\right]_2^4$$

$$= [4 + \ln(4 - 1)] - [2 + \ln(2 - 1)]$$

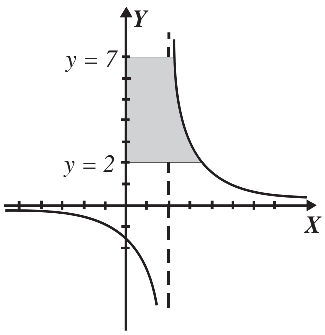
$$= 2 + \ln(3) = 3.098\ u^2$$

4 Calcula el área limitada por la curva $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$, limitada por el eje Y y las rectas $y = 2$, $y = 7$

Solución

Se despeja x de la función y se obtiene

$$x = \frac{3}{y} + 2$$



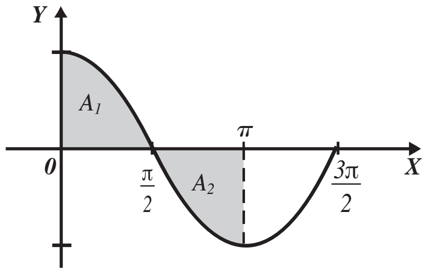
$$\text{Área} = \int_2^7 x\,dy = \int_2^7 \left(\frac{3}{y} + 2\right) dy = \left[3\ln y + 2y\right]_2^7$$

$$= \left(3\ln\left(\frac{7}{2}\right) + 10\right) u^2$$

5 Encuentra el área limitada por el eje X, la función $f(x) = \cos x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$

Solución

Se traza la gráfica de la función $f(x) = \cos x$



Parte del área sombreada queda por debajo del eje X, así que se multiplica por -1

$$\text{Área}_T = A_1 - A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx$$

$$= [\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0\right] - \left[\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 1 - [-1] = 1 + 1 = 2u^2$$

EJERCICIO 22

Determina las áreas comprendidas entre las curvas y las rectas dadas.

1. $f(x) = 2x + 1,\ x = 1,\ x = 4$
2. $f(x) = x^2,\ x = 0,\ x = 3$
3. $f(x) = x^3,\ x = 2,\ x = 5$
4. $f(x) = \sqrt{x},\ x = 0,\ x = 9$
5. $f(x) = 4 - x^2,\ x = -2,\ x = 2$
6. $f(x) = x^2 - 6x + 9,\ x = 3,\ x = 6$
7. $f(x) = \sqrt{x+3},\ x = -3,\ x = 1$
8. $f(x) = \sqrt{x-2},\ x = 2,\ x = 11$
9. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$
10. $f(x) = x^2 - 2x + 1,\ x = -1,\ x = 3$
11. $x = \dfrac{1}{6}(5 - 4y - y^2)$, el eje Y
12. $y = \sqrt{x},\ x = 1,\ x = 4$
13. $x = y - 1,\ y = 1,\ y = 5$
14. $y = 9 - x^2$, el eje X
15. $y = \dfrac{2}{x+1},\ x = 0,\ x = 3$
16. $f(y) = y^3 - y,\ y = -1,\ y = 1$
17. $y = (a\,x)^3,\ x = -\dfrac{2}{a},\ x = \dfrac{2}{a}$
18. $x = \dfrac{y-3}{y-2},\ y = 3,\ y = 5$
19. $f(x) = x\sqrt{x^2-1},\ x = 1,\ x = \sqrt{10}$
20. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2},\ x = 0,\ x = 4$
21. $x = \ln y,\ y = 1,\ y = 4$
22. $y = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^4}},\ x = 0,\ x = 1$

23. $x = \dfrac{2y}{\sqrt{9-y^2}}$, $y = 0$, $y = 2$

24. $y = 3 \operatorname{sen} 2x$, $x = 0$, $x = \pi$

25. $y = e^{2x}$, $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$

26. $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$, $x = -2$, $x = -1$

27. $x = \sqrt{4-y^2}$, $y = -2$, $y = 2$

28. $y = x^2 \cos x$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = 0$

29. $x = \dfrac{3y-5}{y^2-2y-3}$, $y = 4$, $y = 6$

30. $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2-x-6}$, $x = 4$, $x = 6$

31. $x = ye^{y}$, $y = -2$, $y = 0$

32. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$, $x = 4$, $x = 9$

33. $x = \dfrac{e^{\sqrt[3]{y}}}{\sqrt[3]{y^2}}$, $y = 1$, $y = 8$

34. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x = -a$, $x = a$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fórmula de trapecios

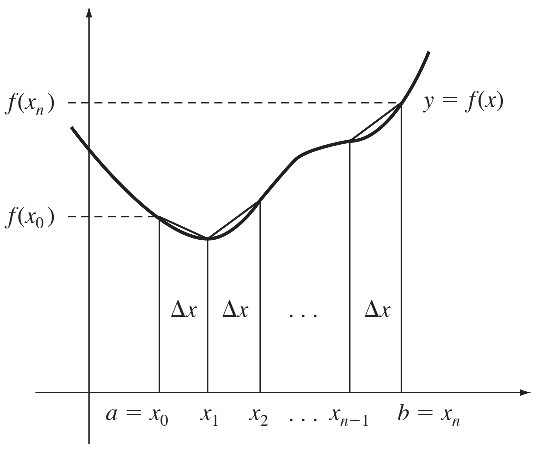
Determinada la función $y = f(x)$, el área aproximada que está limitada por la curva en el intervalo $[a, b]$ es:

$$A = \left(\frac{1}{2}f(x_o) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + \frac{1}{2}f(x_n)\right)\Delta x \quad \text{donde} \quad x_o = a, x_n = b$$

n = número de partes iguales en las que se divide el intervalo $[a, b]$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

es la longitud de cada parte.

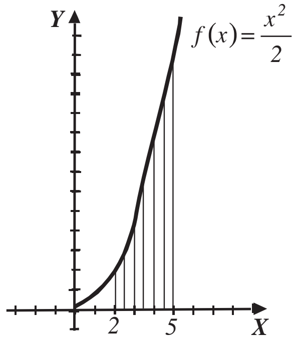


EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula $\int_2^5 \left(\frac{x^2}{2}\right)dx$ utilizando la fórmula de trapecios, dividiendo el intervalo [2, 5] en 6 partes iguales.

Solución



Los datos son:

$$x_o = 2, n = 6, x_6 = 5$$

Con los cuales se obtiene la longitud de cada parte:

$$\Delta x = \frac{5-2}{6} = 0.5$$

Se determinan las ordenadas de los puntos mediante la función $y = \frac{x^2}{2}$,

x_n	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(x_n)$	2	3.125	4.5	6.125	8	10.125	12.5

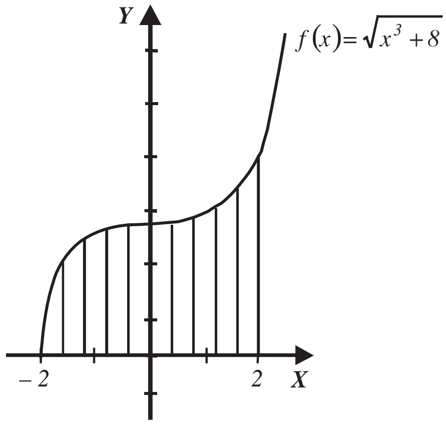
Se aplica la fórmula de trapecios para obtener el área en el intervalo [2, 5],

$$A = \left(\frac{1}{2}(2) + 3.125 + 4.5 + 6.125 + 8 + 10.125 + \frac{1}{2}(12.5)\right)(0.5)$$

$$A = 19.5625\ u^2$$

2 Evalúa la siguiente integral $\int_{-2}^{2}\sqrt{x^3+8}\,dx$ con $n = 10$ intervalos.

Solución



Los datos son:

$$x_0 = -2\,, \quad n = 10, \quad x_{10} = 2$$

Se obtiene el valor de Δx,

$$\Delta x = \frac{2-(-2)}{10} = 0.4$$

Se realiza la tabla para encontrar las ordenadas de x_n, sustituyendo en:

$$f(x) = \sqrt{x^3+8}$$

x_n	−2	−1.6	−1.2	−0.8	−0.4	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2
$f(x_n)$	0	1.975	2.504	2.736	2.817	2.828	2.839	2.917	3.118	3.477	4

Se aplica la fórmula de área de trapecios,

$$A = \left(\frac{1}{2}(0) + 1.975 + 2.504 + 2.736 + 2.817 + 2.828 + 2.839 + 2.917 + 3.118 + 3.477 + \frac{1}{2}(4)\right)0.4$$

Por consiguiente, el área es 10.884 u^2

3 Encuentra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x^2 dx$ tomando 5 intervalos.

Solución

De acuerdo con la integral se tienen los siguientes datos:

$$x_0 = 0, \quad x_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad n = 5$$

La longitud de cada trapecio está determinada por,

$$\Delta x = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{5} = \frac{\pi}{10}$$

Se realiza la tabulación para obtener las ordenadas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

x_n	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x_n)$	0	−0.5877	−0.5877	0.5877	0.5877	0

Entonces, se concluye que,

$$\text{Área} = \left(\frac{1}{2}(0) + |-0.5877| + |-0.5877| + 0.5877 + 0.5877 + \frac{1}{2}(0)\right)\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0.7385\ u^2$$

EJERCICIO 23

Utiliza la fórmula de trapecios para obtener las siguientes áreas:

1. $\int_1^3 x^2\, dx$ con $n = 5$
2. $\int_2^4 (2x-1)dx$ con $n = 8$
3. $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + x^3}\, dx$ con $n = 4$
4. $\int_0^5 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+4}}\, dx$ con $n = 8$
5. $\int_1^3 \sqrt{\ln x}\, dx$ con $n = 8$
6. $\int_1^2 \sqrt{x^5 - \sqrt{x}}\, dx$ con $n = 5$
7. $\int_1^3 e^{x^2-1}\, dx$ con $n = 6$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fórmula de Simpson $\frac{1}{3}$

Dada la función $y = f(x)$, el área limitada por la función y el eje X en el intervalo $[a, b]$ está determinada por:

$$\text{Área} = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_o) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + ... + f(x_n)\right)$$

Donde:

$$x_o = a, \quad x_n = b, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad n = \text{número par de intervalos.}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Evalúa $\int_1^3 \sqrt{x}\, dx$ con $n = 4$ intervalos.

Solución

Los datos son:

$$x_o = 1, \quad x_4 = 3, \quad n = 4$$

Se determina el valor de Δx,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0.5$$

Se sustituyen los valores de x_n en la función $y = \sqrt{x}$ para obtener las ordenadas,

x_n	1	1.5	2	2.5	3
$f(x_n)$	1	1.224	1.414	1.581	1.732

Por consiguiente,

$$\text{Área} = \frac{0.5}{3}(1 + 4(1.224) + 2(1.414) + 4(1.581) + 1.732)$$

$$\text{Área} = 2.796\, u^2$$

2 Evalúa $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}dx$ con $n = 6$ intervalos.

Solución

$x_0 = 0, \quad x_n = 2, \quad n = 6, \quad \Delta x = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3},$

entonces el área es:

$$\text{Área} = \frac{\frac{1}{3}}{3}(0 + 4(0.327) + 2(0.585) + 4(0.707) + 2(0.726) + 4(0.702) + 0.66)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{9}(10.226) = 1.136\, u^2$$

EJERCICIO 24

Utiliza el método de Simpson $\frac{1}{3}$ para evaluar las siguientes integrales:

1. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ con $n = 4$ intervalos
2. $\int_1^4 \sqrt[3]{x^5-2}\,dx$ con $n = 6$ intervalos
3. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,dx$ con $n = 8$ intervalos
4. $\int_0^8 \frac{\sqrt{x^{\frac{1}{3}}+1}}{x+1}\,dx$ con $n = 6$ intervalos
5. $\int_0^{\pi} \cos x^2\,dx$ con $n = 4$ intervalos

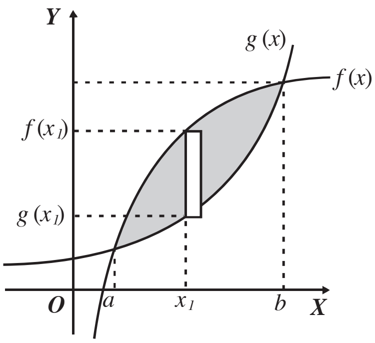
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Área entre curvas planas

Rectángulos de base *dx*

El área comprendida entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$, tomando rectángulos de base dx, está definida como:

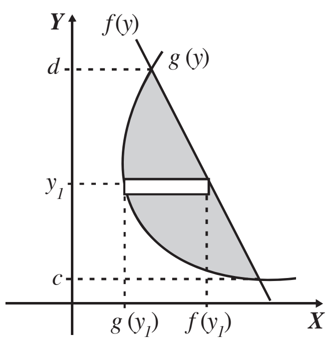
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



Rectángulos de base *dy*

El área comprendida entre las curvas $f(y)$ y $g(y)$, tomando rectángulos de base dy, se define como:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$



Es conveniente graficar las funciones para determinar la fórmula que se debe utilizar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el área limitada entre las curvas $y = x^3 + 1$ y $x - y + 1 = 0$

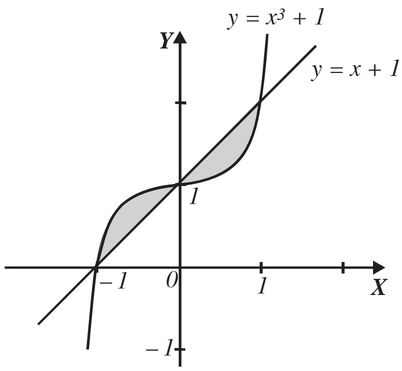
Solución

Se buscan los puntos de intersección de ambas curvas igualando las funciones:

$$x^3 + 1 = x + 1$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x(x-1)(x+1) = 0$$

Por consiguiente,

$$x = 0,\ x = 1 \ \text{ y } \ x = -1$$



Se eligen rectángulos verticales de base dx para calcular el área, por tanto,

$$\text{Área} = \int_{-1}^{0}(y_1 - y_2)dx + \int_{0}^{1}(y_2 - y_1)dx \quad \text{siendo} \quad y_1 = x^3 + 1 \ \text{ y } \ y_2 = x + 1$$
$$= \int_{-1}^{0}[(x^3+1)-(x+1)]\,dx + \int_{0}^{1}[(x+1)-(x^3+1)]\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0}(x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)\,dx$$

Pero

$$\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx = -\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx = \int_{0}^{1}(x - x^3)dx$$

entonces,

$$\text{Área} = \int_{0}^{1}(x - x^3)dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)dx = 2\int_{0}^{1}(x - x^3)dx$$
$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$
$$= 2\left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^4}{4}\right]$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}u^2$$

Finalmente, el área comprendida entre las curvas es $\frac{1}{2}u^2$

2 Obtén el área limitada por las curvas $y^2 = 4x$, $4x + y - 6 = 0$

Solución

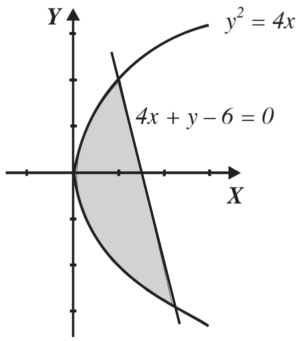
Se buscan las intersecciones de las curvas igualando los despejes en x,

$$\frac{y^2}{4} = \frac{6-y}{4}$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(y+3)(y-2) = 0$$

$$y = -3;\ y = 2$$



Se eligen rectángulos horizontales de base dy, para calcular el área, por tanto,

$$\text{Área} = \int_{-3}^{2}[x_1 - x_2]\,dx = \int_{-3}^{2}\left(\frac{6-y}{4} - \frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-3}^{2}(6 - y - y^2)dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{-3}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(6(2) - \frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3}\right) - \left(6(-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[12 - 2 - \frac{8}{3} + 18 + \frac{9}{2} - \frac{27}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{125}{6}\right)$$

$$= \frac{125}{24}u^2$$

Finalmente, tenemos que el área comprendida por las curvas es $\frac{125}{24}u^2$

3 Encuentra el área limitada por las curvas $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$ y $y^2 - 8x + 16 = 0$

Solución

Los puntos de intersección entre las curvas se obtienen al resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \\ \qquad y^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases}$$

Al multiplicar por -1 la segunda ecuación y sumar con la primera, se obtiene,

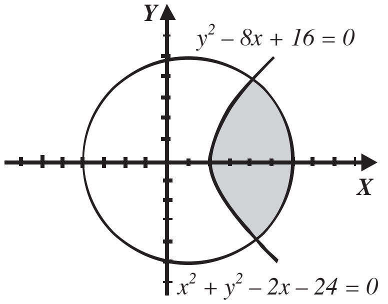
$$x^2 + 6x - 40 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+10)(x-4) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -10;\ x = 4$$

Se sustituye el valor de $x = 4$ en la ecuación de la parábola,

$$y^2 - 8(4) + 16 = 0$$
$$y^2 - 16 = 0$$
$$y = \pm 4$$

Por consiguiente, los puntos de intersección son los puntos (4, 4) y (4, −4) y el área está determinada por:

$$\text{Área} = \int_{-4}^{4} (x_2 - x_1)\, dx$$



Se despeja x de ambas ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \qquad\qquad y^2 - 8x + 16 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 24 - y^2 + 1 \qquad\qquad -8x = -y^2 - 16$$
$$(x-1)^2 = 25 - y^2 \qquad\qquad x = \frac{y^2 + 16}{8}$$
$$x - 1 = \sqrt{25 - y^2}$$
$$x = \sqrt{25 - y^2} + 1$$

Al final se sustituyen en la fórmula del área:

$$A = \int_{-4}^{4}\left[\left(\sqrt{25 - y^2} + 1\right) - \left(\frac{y^2 + 16}{8}\right)\right] dy = \int_{-4}^{4}\left(\sqrt{25 - y^2} - \frac{y^2}{8} - 1\right) dy$$

$$= \left[\frac{y}{2}\sqrt{25 - y^2} + \frac{25}{2}\text{arc sen}\frac{y}{5} - \frac{y^3}{24} - y\right]_{-4}^{4}$$

$$= \left[\frac{4}{2}\sqrt{25 - 4^2} + \frac{25}{2}\text{arc sen}\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{4^3}{24} - 4\right] - \left[\frac{-4}{2}\sqrt{25 - (-4)^2} + \frac{25}{2}\text{arc sen}\left(\frac{-4}{5}\right) - \frac{(-4)^3}{24} - (-4)\right]$$

$$= [6 + 11.59 - 2.66 - 4] - [-6 - 11.59 + 2.66 + 4] = 21.86\ u^2$$

EJERCICIO 25

Obtén el área limitada entre las siguientes curvas:

1. $y = x^2;\ y = x + 2$
2. $x = y^3;\ x^2 + y = 0$
3. $y = 4x - x^2;\ y = x^2$
4. $y^2 - 4x - 6y + 1 = 0;\ y = 2x + 3$
5. $4x^2 - 17x - 15y + 30 = 0;\ y = \sqrt{x+4}$
6. $x^2 + y^2 = 18;\ x^2 = 6y - 9$
7. $x^2 + y^2 = 25;\ y^2 - 8x + 8 = 0$
8. $5x^2 + 16y^2 = 84;\ 4x^2 - y^2 = 12$
9. $3x^2 + 16y - 48 = 0;\ x^2 + y^2 = 16$
10. $y = x^3;\ y = \dfrac{3x}{x+2}$
11. $y^2 = x;\ xy^2 + 2x = 3$
12. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2;\ x^2 + y^2 = 16$
13. $x = 9 - y^2;\ x = 1 - \dfrac{1}{9}y^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

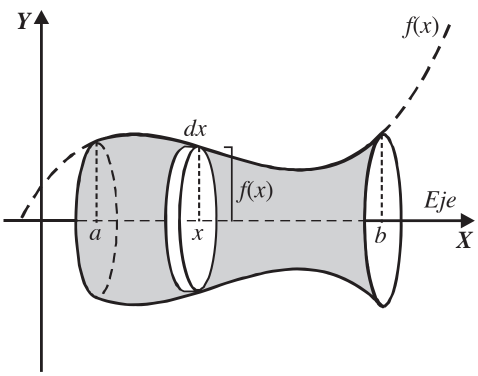
Volumen de sólidos de revolución

Se generan al girar un área plana en torno a una recta conocida como eje de rotación o revolución. Para calcular el volumen se puede utilizar cualquiera de los siguientes métodos.

Método de discos

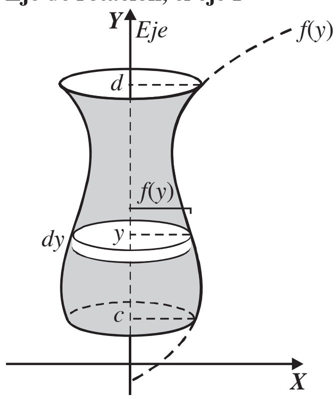
Se utiliza cuando el eje de rotación forma parte del contorno del área plana.

Eje de rotación, el eje *X*



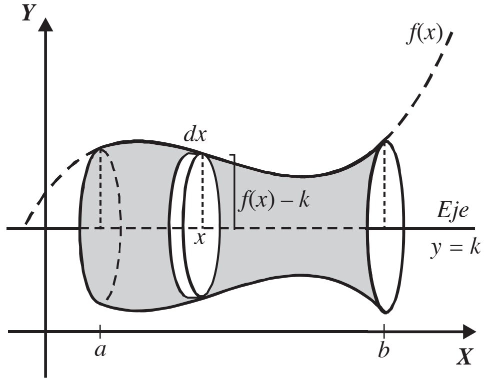
$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

Eje de rotación, el eje *Y*



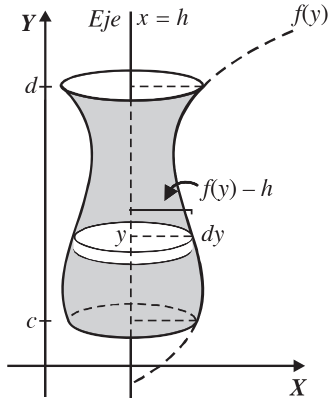
$$V = \pi\int_c^d [f(y)]^2\,dy$$

Eje de rotación, la recta $y = k$



$$V = \pi \int_a^b \left[f(x) - k \right]^2 dx$$

Eje de rotación, la recta $x = h$



$$V = \pi \int_c^d \left[f(y) - h \right]^2 dy$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el volumen que se genera al hacer girar el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x - 2 = 0$ alrededor del eje X.

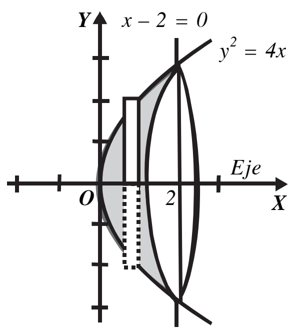
Solución

Al hacer girar el rectángulo de altura $f(x)$ y ancho dx alrededor del eje X, se forma un disco de volumen,

$$dV = \pi y^2\, dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = 2$, se obtiene el volumen del sólido,

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (4x) dx = \left[2\pi x^2 \right]_0^2 = 8\pi u^3$$



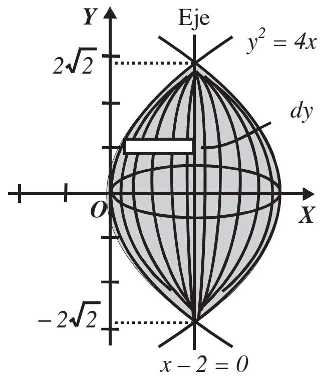
2 Encuentra el volumen generado al hacer girar el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ en torno a la recta $x - 2 = 0$

Solución

Para generar el sólido se deben girar los rectángulos alrededor del eje $x = 2$, que es paralelo al eje Y, por tanto el volumen de los discos es:

$$dV = \pi(2 - x)^2\,dy$$

Integrando desde $y = -2\sqrt{2}$ hasta $y = 2\sqrt{2}$ se obtiene el volumen del sólido.



$V = \pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}(2-x)^2 dy$ con $x = \dfrac{y^2}{4}$, sustituyendo y simplificando:

$$V = \pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(2-\frac{y^2}{4}\right)^2 dy = 2\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(2-\frac{y^2}{4}\right)^2 dy = 2\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(4-y^2+\frac{y^4}{16}\right)dy$$

$$= 2\pi\left[4y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{80}\right]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{128\sqrt{2}}{15}\pi u^3$$

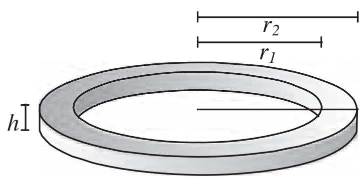
Método de las arandelas

Se emplea cuando el eje de rotación no es parte del contorno del área limitada por las curvas, esto significa que se generan sólidos de revolución con un hueco en el centro, al tipo de discos con hueco en el centro que se utilizan para hallar el volumen se denomina, arandela.

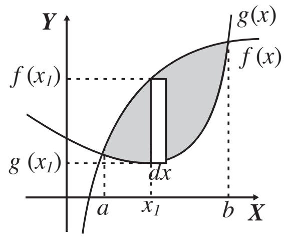
Volumen de una arandela

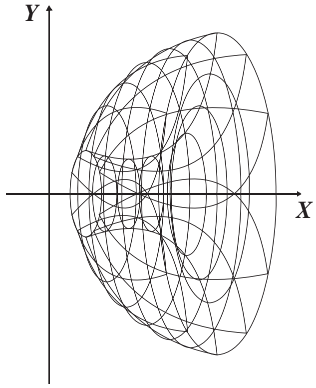
Sea V el volumen de la arandela, entonces se define como la diferencia de volúmenes de los cilindros de radio r_2 y r_1

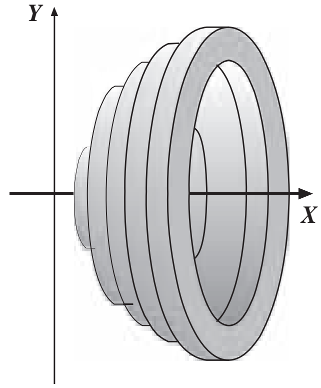
$$V = V_1 - V_2 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$



Eje de rotación horizontal



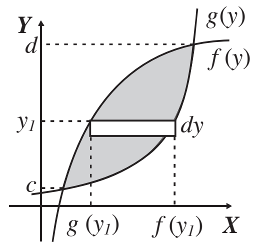


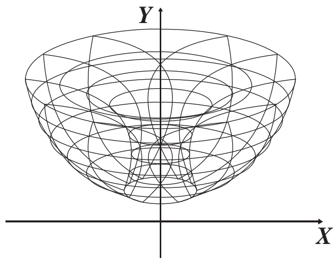


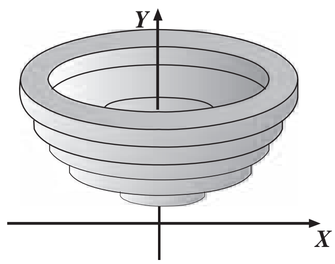
El volumen generado en torno al eje X se define como:

$$V=\pi\int_a^b\left([f(x)]^2-[g(x)]^2\right)dx$$

Eje de rotación vertical







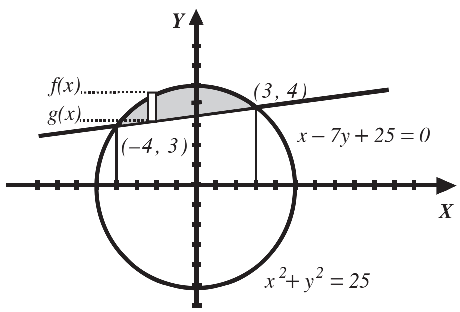
El volumen generado en torno al eje Y se define como:

$$V=\pi\int_c^d\left([f(y)]^2-[g(y)]^2\right)dy$$

Ejemplo

Determina el volumen que se genera al girar el área limitada por la circunferencia $x^2+y^2=25$ y la recta $x-7y+25=0$ en torno al eje X.

Solución



Se resuelve el sistema de ecuaciones para obtener los puntos de intersección,

$$x^2+y^2=25 \qquad x-7y+25=0$$

$$y=\pm\sqrt{25-x^2} \qquad y=\frac{x+25}{7}$$

$$\pm\sqrt{25-x^2}=\frac{x+25}{7}$$

$$\left(\pm\sqrt{25-x^2}\right)^2=\left(\frac{x+25}{7}\right)^2$$

$$x^2+x-12=0$$

$$(x+4)(x-3)=0$$

Por consiguiente, las abscisas de los puntos son $x=-4$ y $x=3$, los cuales resultan ser los límites de integración. El eje de rotación no es parte del contorno de la superficie, por lo que se emplea la fórmula:

$$V=\pi\int_a^b\left(\left[f(x)\right]^2-\left[g(x)\right]^2\right)dx$$

Donde $f(x)$ es la circunferencia y $g(x)$ la recta.
Al calcular el volumen se obtiene:

$$V=\pi\int_{-4}^{3}\left(\left[\pm\sqrt{25-x^2}\right]^2-\left[\frac{x+25}{7}\right]^2\right)dx=\pi\int_{-4}^{3}\left(25-x^2-\frac{x^2+50x+625}{49}\right)dx$$

$$=\pi\int_{-4}^{3}\left(\frac{600-50x-50x^2}{49}\right)dx=\frac{50}{49}\pi\int_{-4}^{3}(12-x-x^2)\,dx$$

$$=\frac{50}{49}\pi\left[12x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{3}$$

$$=\frac{50}{49}\pi\left[\left(12(3)-\frac{3^2}{2}-\frac{3^3}{3}\right)-\left(12(-4)-\frac{(-4)^2}{2}-\frac{(-4)^3}{3}\right)\right]$$

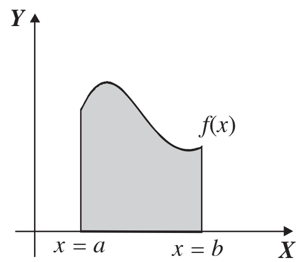
Por consiguiente, se deduce que el volumen es igual a: $V=\dfrac{175}{3}\pi\,u^3$

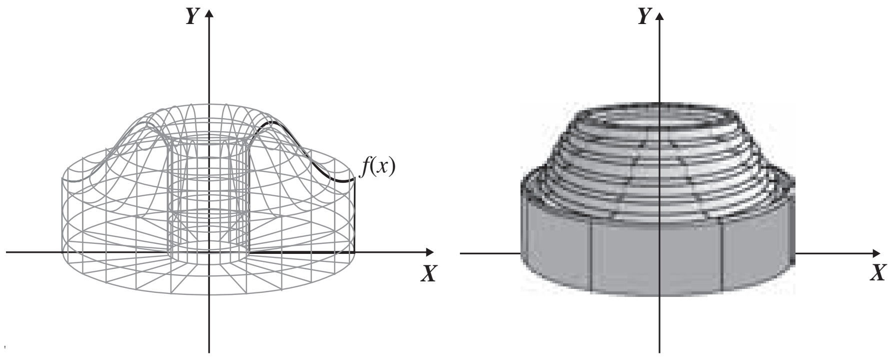
Método de capas

En este método el volumen de la capa se expresa en función de la circunferencia media, la altura y el espesor de la capa cilíndrica, engendrada al girar el rectángulo en torno al eje de rotación.

La gráfica de la derecha muestra el área comprendida por la función $y=f(x)$ con $f(x)>0$, el eje X y las rectas $x=a$ y $x=b$.

Al girarla sobre el eje Y se genera el sólido de revolución, éste se divide en n capas o casquetes cilíndricos, unos dentro de otros, con la finalidad de obtener el volumen del sólido.





El volumen de un casquete cilíndrico se define como el volumen del cilindro exterior menos el interior, entonces:

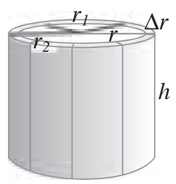
$$V = V_2 - V_1 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi h(r_2^2 - r_1^2)$$
$$= \pi h(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$$

pero

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad \text{y} \quad \Delta r = r_2 - r_1$$

entonces:

$$V = 2\pi r h \Delta r$$



➲ **Eje de rotación el eje "y"**

En el plano cartesiano se elige el i-ésimo casquete cilíndrico de dimensiones $r = x_i$, $h = f(x_i)$ y $\Delta r = \Delta x$, al sumar los volúmenes de los n casquetes cilíndricos cuando n es muy grande se obtiene:

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi\, x_i f(x_i)\Delta x = 2\pi\int_a^b x f(x)dx$$

➲ **Eje de rotación el eje "x"**

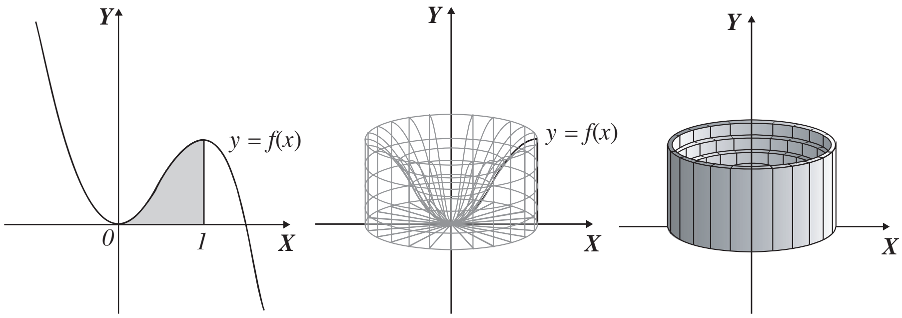
$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi\, y_i f(y_i)\Delta y = 2\pi\int_c^d y\, f(y)\, dy$$

EJEMPLOS

1 Utiliza el método de capas para hallar el volumen que se genera al girar sobre el eje Y el área limitada por la curva $y = 3x^2 - 2x^3$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución

Gráfica del área a rotar y del sólido de revolución seccionado en capas



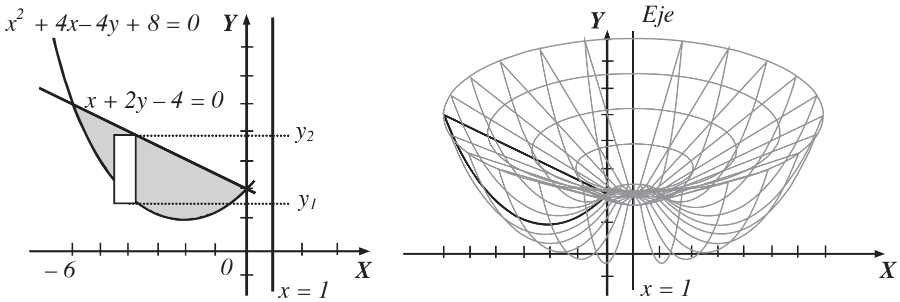
Luego, el volumen se define:

$$V = 2\pi\int_0^1 x(3x^2 - 2x^3)dx = 2\pi\int_0^1 (3x^3 - 2x^4)dx = 2\pi\left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^5\right]_0^1 = 2\pi\left[\frac{3}{4}(1)^4 - \frac{2}{5}(1)^5\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right] = 2\pi\left[\frac{15-8}{20}\right] = 2\pi\left[\frac{7}{20}\right] = \frac{7}{10}\pi\, u^3$$

2 Obtén el volumen que genera el área plana acotada por la parábola $x^2 + 4x - 4y + 8 = 0$ y la recta $x + 2y - 4 = 0$, al girar en torno a la recta $x - 1 = 0$

Solución



Para encontrar los puntos de intersección de la recta y la parábola se igualan las ordenadas y se resuelve la ecuación para x.

$$\frac{x^2 + 4x + 8}{4} = \frac{4 - x}{2} \quad \rightarrow \quad x^2 + 6x = 0 \qquad x(x + 6) = 0$$

$$x = 0, x = -6$$

La altura del rectángulo está determinada por

$$y_2 - y_1 = \frac{4-x}{2} - \frac{x^2+4x+8}{4} = -\frac{6x+x^2}{4}$$

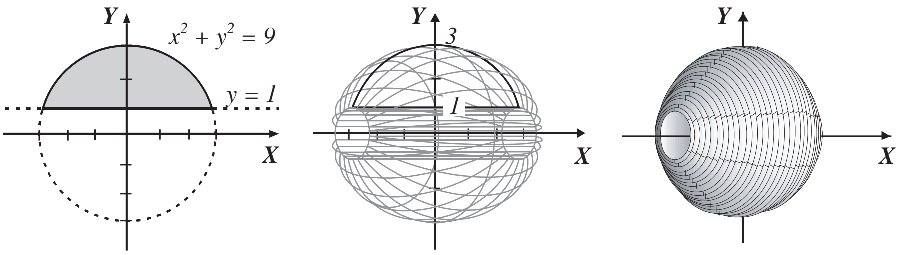
la distancia del rectángulo al eje de rotación es $(1 - x)$ y su ancho dx, al aplicar la fórmula se obtiene el volumen,

$$V = 2\pi\int_{-6}^{0}(1-x)\left(-\frac{6x+x^2}{4}\right)dx = \frac{2\pi}{4}\int_{-6}^{0}(x^3+5x^2-6x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}-3x^2\right]_{-6}^{0}$$

Finalmente, el volumen resulta ser: $V = 72\,\pi u^3$

3 Determina el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar sobre el eje X el área limitada por la curva $x^2 + y^2 = 9$ y la recta $y - 1 = 0$

Solución



El volumen se genera tanto en el lado positivo como en el lado negativo del eje X, por tanto:

$$V = 2\int_{1}^{3} 2\pi\, y\left(\sqrt{9-y^2}\right)dy = 4\pi\int_{1}^{3} y\left(\sqrt{9-y^2}\right)dy$$

Se resuelve la integral:

$$V = 4\pi\left[-\frac{(9-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{1}^{3}$$

Al evaluar se obtiene como resultado

$$V = 4\pi\left[-\frac{(9-9)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{(9-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] = 4\pi\left[\frac{16\sqrt{2}}{3}\right] = \frac{64\sqrt{2}}{3}\,\pi u^3$$

EJERCICIO 26

Resuelve los siguientes problemas:

1. Determina el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 4 alrededor del eje X.
2. Calcula el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = \sqrt{x-2}$ y las rectas $x = 2$, $x = 11$, alrededor del eje X.
3. Obtén el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = x^2$ y las rectas $x = 0$, $x = 3$ alrededor del eje X.
4. Determina el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 2$, $x = 0$ alrededor del eje Y.
5. Determina el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = x^3$, y las rectas $x = 0$, $y = 8$, alrededor del eje Y.
6. Determina el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $x = 0$, $y = 16$ alrededor del eje Y.
7. Determina el volumen que origina la superficie limitada por la parábola $y + x^2 = 0$ y la recta $y + 4 = 0$, al girar en torno del eje Y.
8. Obtén el volumen que se genera al rotar en torno al eje X el área limitada por la curva $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 0$.
9. Encuentra el volumen que se genera al hacer girar la superficie limitada por la curva $y = \sqrt{x^2+1}$ y las rectas $x = -2$ y $x = 2$ en torno al eje X.
10. Determina el volumen que se genera al hacer girar la superficie limitada por la curva $x^2 - y^2 + 1 = 0$ y las rectas $y = 1.5$, $y = 3$ en torno al eje Y.
11. Precisa el volumen que se genera al rotar en torno al eje X la superficie limitada por la semielipse $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$ y el eje X.
12. Obtén el volumen generado al girar en torno al eje Y la superficie limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.
13. Encuentra el volumen que se origina al girar en torno al eje X, la superficie limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.
14. Determina el volumen generado por las curvas $x^2 + y^2 = 25$ y $y^2 - 6x + 15 = 0$, al girar en torno al eje Y.
15. Precisa el volumen que se genera al rotar en torno al eje X la superficie limitada por la curva $y = 4x - x^2$ y la recta $x - y = 0$
16. Calcula el volumen generado al rotar en torno al eje X, la superficie limitada por la parábola $x^2 - 6x - 8y + 17 = 0$ y la recta $x - 4y + 5 = 0$
17. Encuentra el volumen que se genera por la superficie limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, cuando gira en torno a la recta $x + 3 = 0$
18. Calcula el volumen que se genera al girar la superficie limitada por la parábola $y^2 + 4x - 6y - 11 = 0$, y la recta $2x + y - 9 = 0$, en torno a la recta $y + 1 = 0$
19. Obtén el volumen que se genera al rotar en torno a la recta $x - 2 = 0$, la superficie limitada por la curva $4x^2 + y^2 + 48x + 128 = 0$
20. Encuentra el volumen que se genera por la superficie limitada por la primera arcada de la función sen x, al girar en torno a la recta $2x - 3\pi = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Longitud de arco

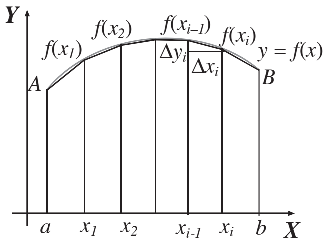
Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$, entonces la longitud de arco se define como:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Demostración

Se eligen n puntos del arco AB y se unen los puntos adyacentes mediante cuerdas, las cuales tendrán longitud Δs, la línea quebrada resultante tendrá longitud

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$$



El límite al que tiende esta longitud cuando Δs_i tiende a cero es la longitud (L) del arco AB, siendo

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

y por el teorema del valor medio:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(x)$$

para cualquier valor de x que cumpla $x_{i-1} < x < x_i$, entonces:

$$L = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

En forma semejante, si la curva tiene por ecuación $x = h(y)$, entonces la longitud de la curva está determinada por:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [h'(y)]^2}\, dy$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la longitud del arco de la curva $y = x^2$, en el intervalo [2, 4]

Solución

Se deriva la función y se obtiene

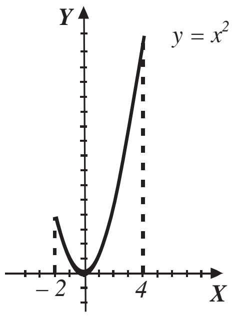
$$y' = 2x$$

Al sustituir en la fórmula,

$$L = \int_2^4 \sqrt{1+(2x)^2}\, dx = \int_2^4 \sqrt{1+4x^2}\, d.$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)\right]_2^4$$

$$= 2\sqrt{65} - \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\frac{8+\sqrt{65}}{4+\sqrt{17}} = 12.170\ u$$



2 Obtén la longitud del arco de la curva, cuya ecuación es $x = y^{\frac{3}{2}}$, entre los puntos (0, 0) y (64, 16)

Solución

Al derivar con respecto a Y se obtiene,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, se sustituye en la fórmula:

$$L = \int_0^{16}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dy = \int_0^{16}\sqrt{1+\frac{9}{4}y}\, dy = \frac{1}{2}\int_0^{16}\sqrt{4+9y}\, dy$$

$$= \left[\frac{\sqrt{(4+9y)^3}}{27}\right]_0^{16}$$

$$= 66.685\ u$$

EJERCICIO 27

Encuentra la longitud de arco en los intervalos dados de cada una de las siguientes curvas.

1. $y^2 = x^3$	$1 \leq x \leq 4$
2. $x = y^2$	$0 \leq x \leq 1$
3. $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$	$1 \leq x \leq 4$
4. $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}}$	$0 \leq x \leq 1$
5. $f(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$	$1 \leq x \leq 3$
6. $f(x) = \ln \cos x$	$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
7. $f(x) = \ln \operatorname{sen} x$	$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
8. $y = \ln x^2$	$1 \leq x \leq 5$
9. $y = \ln x$	$\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$
10. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$	$2 \leq x \leq 5$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicaciones a la economía

Función de costos

El costo total para producir, vender y distribuir un artículo es igual a la suma de los costos fijos más los costos variables.

$$C(x)_t = C_f + C_v$$

Los costos variables dependen del número de unidades x, mientras que los costos fijos no. Estos últimos permanecen constantes, algunos son el pago de la renta, el mantenimiento, y otros más en los cuales no importa si se produce, vende y distribuye una pieza, mil o cualquier otra cantidad y se representan, como:

$$C(x = 0) = C_f$$

El costo marginal es el costo para producir una unidad adicional más cuando ya se tiene un nivel de producción determinado y se expresa como la derivada del costo total respecto al número de unidades:

$$\text{Costo marginal} = \frac{dC(x)}{dx}$$

De forma contraria, si lo que se conoce es el costo marginal, entonces el costo total es la integral:

$$C = \int C'(x)\,dx$$

Cuando se resuelve esta integral se obtiene una constante de integración, la cual se puede conocer mediante las condiciones iniciales, la cual regularmente es equivalente a los costos fijos.

Ejemplo

El costo marginal que emplea un fabricante de pernos está dado por $\frac{dC(x)}{dx} = 302 - 0.04x$ y el costo fijo es de \$12. Obtén la función de costo total.

Solución

El costo total se obtiene resolviendo la integral:

$$C = \int (302 - 0.04x)\, dx$$

$$C = 302x - 0.02x^2 + K$$

Pero K, en realidad, son los costos fijos C_f, entonces:

$$C(x = 0) = 302(x) - 0.02(x)^2 + K,$$

pero se sabe que $C(x = 0) = C_f$, entonces:

$$C_f = 12 = K$$

Entonces la función del costo total es:

$$C(x) = 302x - 0.02x^2 + 12$$

Función de ingresos

La demanda de un producto se define como $p(x)$, mientras el ingreso total es el producto del precio, por el número de unidades x, que se venden.

$$I(x) = p(x) \cdot x$$

El ingreso marginal está en función de la cantidad demandada y matemáticamente se representa como la derivada del ingreso total, con respecto a la cantidad x

$$\text{Ingreso marginal} = \frac{d\,I(x)}{dx}$$

Si lo que se desea obtener es el ingreso total y se tiene el ingreso marginal, entonces se procede a efectuar una integración:

$$I(x) = \int I'(x)\, dx$$

En este caso, cuando se integra y se encuentra la constante ésta será siempre igual a cero, ya que si no se comercializa ninguna pieza x, no existirán ingresos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La función del ingreso marginal al producir una bicicleta está dada por la función $\frac{dI(x)}{dx} = 3x^2 - 2x + 20$, determina la función del ingreso total y la función de demanda total.

Solución

El ingreso total se obtiene resolviendo la integral:

$$I(x) = \int (3x^2 - 2x + 20)dx$$

$$I(x) = x^3 - x^2 + 20x + C$$

Pero $I(x = 0) = 0$, por tanto, se obtiene el valor de C

$$I(x = 0) = (0)^3 - (0)^2 + 20(0) + C \quad \rightarrow \quad 0 = C$$

Entonces la función del ingreso total es:

$$I(x) = x^3 - x^2 + 20x$$

Para obtener la función de demanda se despeja a $p(x)$, de la relación:

$$I(x) = p(x) \cdot x \quad \rightarrow \quad p(x) = \frac{I(x)}{x}$$

Entonces, se obtiene:

$$p(x) = \frac{x^3 - x^2 + 20x}{x} = x^2 - x + 20$$

2 Una compañía manufacturera sabe que la función del ingreso marginal de un producto es $I'(x) = 20 - 0.002x$, en donde $I'(x)$ se cuantifica en pesos y x es el número de unidades.

Con base en la información antes mencionada, determina:

a) La función de ingresos totales
b) La función de la demanda del producto
c) Los ingresos totales al venderse 500 unidades
d) El precio, cuando se venden 3 500 artículos

Solución

a) La función de los ingresos totales se obtiene al resolver la integral:

$$I(x) = \int (20 - 0.002x)\, dx$$

$$I(x) = 20x - 0.001x^2 + C$$

La condición $I(x = 0) = 0$, por tanto, se obtiene el valor de C

$$I(0) = 20(0) - (0.001)(0)^2 + C \quad \rightarrow \quad 0 = C$$

Entonces la función del ingreso total es:

$$I(x) = 20x - 0.001x^2$$

b) Para obtener la función de demanda se despeja a $p(x)$, de la relación:

$$I(x) = p(x) \cdot x \quad \rightarrow \quad p(x) = \frac{I(x)}{x}$$

Entonces, se determina que:

$$p(x) = \frac{20x - 0.001x^2}{x} = 20 - 0.001x$$

c) Para determinar los ingresos totales al venderse 500 artículos, se sustituye en:

$I(x) = 20x - 0.001x^2$
$I(500) = 20(500) - (0.001)(500)^2$
$I(500) = 10\,000 - 250$
$I(500) = \$\,9\,750$

d) Si se desea obtener el precio, cuando se venden 3 500 unidades, se sustituye en:

$p(x) = 20 - 0.001x$
$p(3\,500) = 20 - 0.001(3\,500)$
$p(3\,500) = 20 - 3.5$
$p(3\,500) = \$16.5$

EJERCICIO 28

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. El costo marginal para producir un perno metálico está dado por $C'(x) = 20 - x - x^2$, además se sabe que el costo fijo es \$4.00
   Determina:
   a) La función de costo total
   b) El costo de producir 5 unidades

2. La función del ingreso marginal de un cierto producto es $I'(x) = 3x^2 - 2x + 5$, determina la función de ingreso total.

3. La función $f(x) = 4e^{0.005x}$, representa el costo marginal de producción de un buje de cobre, en donde los costos fijos están dados por $C_f = \$200.00$. Obtén:
   a) La función del costo total
   b) El costo cuando se producen 500 piezas

4. El ingreso marginal que tiene registrado un productor de bicicletas de montaña es: $I'(x) = 8 + 3(2x - 3)^2$, determina la función del ingreso total y la demanda.

5. El gerente de una empresa productora de dulces sabe que su costo marginal está dado por la función
   $$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{5}{\sqrt{2x+1}},$$
   además sabe que el costo de producir 40 dulces, es \$53.00.
   Encuentra:
   a) La función del costo total
   b) El costo de fabricar 220 piezas

6. Una máquina de coser industrial se deprecia en función del tiempo t, según la función $P'(t) = -\dfrac{8160}{(3t+2)^2}$.
   Determina:
   a) La función del precio $P(t)$, de la máquina, t años después de su adquisición
   b) ¿Cuál es su valor después de 5 años?

7. Una compañía deprecia una computadora en función del tiempo t medido en años, según la función
   $$\frac{dP(t)}{dt} = -\frac{24\,000}{(t+3)^4}$$
   en donde $P(t)$, es el precio de la máquina t años después de su adquisición. ¿Cuál es su valor después de 2 años?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 11

ECUACIONES DIFERENCIALES

Reseña HISTÓRICA

Inventó un método para determinar aproximadamente el tiempo de un fósil. Su teoría (de la datación o fechamiento con radiocarbono), está basada en que la razón de la cantidad de carbono 14 al carbono ordinario es constante de tal forma que la cantidad proporcional absorbida por los organismos vivos es igual que la de la atmósfera. Por lo que cuando muere un organismo la absorción de este elemento cesa y empieza a desintegrarse (vida media de un material radiactivo).

De tal forma que solo basta con comparar la cantidad de carbono 14 presente en el fósil, con la relación constante que existe en la atmósfera. Con base en la vida media del carbono que es aproximadamente de 5600 años se plantea la variación de una cantidad inicial C_0 de carbono 14 en el fósil con respecto al tiempo, obteniendo una ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$\frac{dC_0}{dt} = kC_0 \quad \text{en donde} \quad C_0 = C_0(0)$$

La cual resolveremos en este capítulo.

Willard Libby
(1908-1980)

Introducción

Casi cualquier problema del mundo real se puede resolver mediante la formulación de un modelo matemático que, al resolverlo con los conocimientos adquiridos (en particular de cálculo), permita obtener conclusiones matemáticas, las cuales posteriormente nos permitirán hacer una interpretación acerca del fenómeno sobre el cual gira el problema y entonces podremos hacer predicciones sobre el mismo. Estas predicciones siempre se deben verificar con los datos nuevos que se derivan de la práctica. Es decir, si las predicciones no coinciden con los datos nuevos, entonces hay que ajustar el modelo.

La mayoría de estos problemas a resolver surgen en la física, la química y las ciencias sociales (crecimiento de población, decaimiento radiactivo, problemas donde interviene la velocidad y la aceleración, antigüedad de un fósil, etc.…). En muchas ocasiones, cuando se utiliza el cálculo, es porque se presenta una ecuación diferencial surgida del modelo encontrado, por esta razón una de las aplicaciones más importantes del cálculo son, sin duda, las ecuaciones diferenciales.

En este capítulo sólo se dará una introducción a las ecuaciones diferenciales (definición, clasificación, algunos métodos de solución y ejemplos de aplicación); es decir, no se pretende dar un curso completo, sólo haremos referencia a lo básico para que el alumno posteriormente pueda iniciar un curso formal de ecuaciones diferenciales.

Definición

Una ecuación diferencial es aquella que tiene una función desconocida y una o más de sus derivadas.

La representación de una ecuación diferencial en su forma general es:

$$F(x, y, y', y'' \cdot y''', ..., y^{n}) = 0$$

Con x variable independiente, $y = f(x)$ variable dependiente (en este caso la función desconocida), y', y'', y''', …, y^n, sus derivadas.

El **orden** de una ecuación diferencial está dado por la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

El **grado** de una ecuación diferencial es el grado de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

Por ejemplo:

Ecuación	**Orden**	**Grado**
$\frac{dy}{dx} - x = 7$	Primero	Primero
$2xy' - y = 6$	Primero	Primero
$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = -4y$	Segundo	Primero
$(y'')^2 + 2(y')^3 + 2y = x$	Segundo	Segundo
$2y''' - 4(y'')^2 - y' = 6x$	Tercero	Primero

Si una ecuación tiene una variable independiente se denomina ***ecuación diferencial ordinaria***, ya que sus derivadas son ordinarias.

Por ejemplo:

$$y' - 2x = 8 \qquad y'' - y' = x \qquad y''' - xy'' + 2y(y')^2 - xy = 0$$

Si una ecuación diferencial tiene dos o más variables independientes, se llama ecuación entre derivadas parciales, ya que las derivadas son parciales:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}t + \frac{\partial z}{\partial t} = xyt$$

La **solución** de una ecuación diferencial es una función $y = f(x)$ que junto con sus derivadas sucesivas se transforma en una identidad al ser sustituidas en ella.

Ejemplo

Comprueba que $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, es solución de la ecuación $3y - xy' + 3 = y'' + 3(2x + x^2)$

Solución

Se obtienen la primera y segunda derivada de $f(x)$

$y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ Función

$y' = f'(x) = 3x^2 + 6x + 6$ Primera derivada

$y'' = f''(x) = 6x + 6$ Segunda derivada

Se sustituyen y, y', y'' en la ecuación

$$3y - xy' + 3 = y'' + 3(2x + x^2)$$

$$3(x^3 + 3x^2 + 6x + 1) - x(3x^2 + 6x + 6) + 3 = (6x + 6) + 3(2x + x^2)$$

$$3x^3 + 9x^2 + 18x + 3 - 3x^3 - 6x^2 - 6x + 3 = 6x + 6 + 6x + 3x^2$$

$$3x^2 + 12x + 6 = 3x^2 + 12x + 6$$

Por tanto, $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ es solución de la ecuación.

Una **solución general** es una función de una variable que tiene un número de constantes arbitrarias no conocidas igual al orden de la ecuación y que al sustituirla en la ecuación se transforma en una igualdad.

Una **solución particular** es una función de una sola variable que se obtiene de la solución general, obteniendo el valor de sus constantes y que al sustituirla en la ecuación la transforma en una identidad.

Ejemplo

Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 5 - 2x$$

Determina cuál de las siguientes funciones es solución e indica de qué tipo es:

a) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1$

b) $y = -e^x - x + 1$

Solución

a) Se sustituye $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1$ en la ecuación con sus respectivas derivadas y si se transforma en una igualdad, entonces sí es solución y será del tipo general.

$y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1$

$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - 1$

$y'' = C_1e^x + 4C_2e^{2x}$

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= (C_1e^x + 4C_2e^{2x}) - 3(C_1e^x + 2C_2e^{2x} - 1) + 2(C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1) \\ &= C_1e^x - 3C_1e^x + 2C_1e^x + 4C_2e^{2x} - 6C_2e^{2x} + 2C_2e^{2x} + 3 - 2x + 2 \\ &= 5 - 2x \end{aligned}$$

C_1, C_2 son constantes no conocidas, por tanto es una solución general.

b) Se sustituye $y=-e^x-x+1$ en la ecuación con sus respectivas derivadas y si se transforma en una igualdad, entonces sí es solución y será particular.

$$y=-e^x-x+1$$

$$y'=-e^x-1$$

$$y''=-e^x$$

$$\begin{aligned} y''-3y'+2y &= (-e^x)-3(-e^x-1)+2(-e^x-x+1) \\ &= -e^x+3e^x-2e^x+3-2x+2 \\ &= 5-2x \end{aligned}$$

La solución tiene constantes definidas $C_1=-1$, $C_2=0$, por tanto es una solución particular.

Ecuación diferencial de primer orden

Ahora se resolverán algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden con el método de variables separables y homogéneas.

Al resolver ecuaciones diferenciales seguramente se necesitarán ciertos métodos de integración, por ello te sugerimos tomarte algunos minutos en repasar los capítulos anteriores.

Variables separables

La técnica más simple es la aplicada en una ecuación diferencial que se reduce a la forma:

$$M(x)dx+N(y)dy=0$$

Donde $M(x)$ es una función que depende de x y $N(y)$ es una función que depende de y. Con ello han sido separadas las variables, por lo cual la ecuación diferencial es del tipo de **variables separables**. Su solución se obtiene por integración directa:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=C$$

Donde C es una constante arbitraria.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $\dfrac{dy}{dx}=6x^2$

Solución

La ecuación se transforma a:

$$dy=6x^2\,dx$$

Se integran ambos miembros de la ecuación

$$\int dy=\int 6x^2dx$$

$$y=2x^3+C$$

Por consiguiente la solución es:

$$y=2x^3+C$$

2 Resuelve la ecuación $(1 + y^2)dx + xydy = 0$

Solución

Se trasponen los términos:

$$(1 + y^2)dx + xydy = 0$$

$$(1 + y^2)dx = -xydy$$

Se multiplica por $\dfrac{1}{x(1+y^2)}$ y se simplifica:

$$\frac{1}{x(1+y^2)}(1 + y^2)dx = \frac{1}{x(1+y^2)}(-xydy)$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{ydy}{1+y^2}$$

Se integra cada lado de la igualdad:

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{ydy}{1+y^2} + C_1$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C_1$$

Se sustituye $C_1 = \ln C_2$

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \ln C_2$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln C_2$$

Se aplica la propiedad $\ln a^m = m\ln a$

$$\ln x + \ln\sqrt{1+y^2} = \ln C_2$$

Se aplica la propiedad $\ln ab = \ln a + \ln b$

$$\ln x\sqrt{1+y^2} = \ln C_2$$

$$x\sqrt{1+y^2} = C$$

$$\left(x\sqrt{1+y^2}\right)^2 = (C_2)^2$$

Se despeja y, se sustituye $(C_2)^2 = C$

$$x^2(1+y^2) = C$$

$$1 + y^2 = \frac{C}{x^2}$$

$$y^2 = \frac{C}{x^2} - 1 = \frac{C - x^2}{x^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{C - x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{C - x^2}}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{C - x^2}$$

Por tanto, la solución general es: $y = \dfrac{1}{x}\sqrt{C - x^2}$

3 Resuelve la ecuación $(y^2 + xy^2)\dfrac{dy}{dx} + x^2 - yx^2 = 0$

Solución

La ecuación se transforma en:

$$(y^2 + xy^2)\frac{dy}{dx} + x^2 - yx^2 = 0$$

Se factoriza cada término

$$y^2(1 + x)\frac{dy}{dx} + x^2(1 - y) = 0$$

$$y^2(1 + x)dy + [x^2(1 - y)]dx = 0$$

Se multiplica cada término por $\dfrac{1}{(1+x)(1-y)}$

$$\frac{1}{(1+x)(1-y)}[y^2(1 + x)]dy + \frac{1}{(1+x)(1-y)}[x^2(1 - y)]dx = 0$$

$$\frac{y^2}{1-y}dy + \frac{x^2}{1+x}dx = 0$$

$$\frac{y^2}{1-y}dy = -\frac{x^2}{1+x}dx$$

Al integrar ambos miembros de la igualdad

$$\int\frac{y^2}{1-y}dy = -\int\frac{x^2}{1+x}dx$$

se divide y se obtiene que

$$\frac{y^2}{1-y} = -y - 1 + \frac{1}{1-y}$$

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

Regresando a la integral

$$\int\left(-y-1+\frac{1}{1-y}\right)dy = -\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$-\int ydy - \int dy + \int\frac{dy}{1-y} = -\int xdx + \int dx - \int\frac{dx}{x+1}$$

$$-\frac{1}{2}y^2 - y - \ln|y - 1| = -\frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x + 1| + C_1$$

Se multiplica por 2

$$-y^2 - 2y - 2\ln|y - 1| = -x^2 + 2x - 2\ln|x + 1| + 2C_1$$
$$x^2 - y^2 - 2x - 2y + 2\ln|x + 1| - 2\ln|y - 1| = C$$

Al aplicar la propiedad $\ln a^m = m\ln a$ y al factorizar $x^2 - y^2$ se obtiene:

$$(x + y)(x - y) - 2(x + y) + \ln(x + 1)^2 - \ln(y - 1)^2 = C$$

Al aplicar la propiedad $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$$(x + y)(x - y) - 2(x + y) + \ln\frac{(x+1)^2}{(y-1)^2} = C$$

$$(x + y)(x - y - 2) + \ln\frac{(x+1)^2}{(y-1)^2} = C$$

$$(x + y)(x - y - 2) + \ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 = C$$

Finalmente, la solución general es:

$$(x + y)(x - y - 2) + \ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 = C$$

4 Resuelve $(1 + y^2)dx = xdy$

Solución

Se multiplica por el factor $\frac{1}{x(1+y^2)}$, cada término de la igualdad

$$\frac{1}{x(1+y^2)}(1 + y^2)dx = \frac{1}{x(1+y^2)}xdy$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{1+y^2}$$

Al integrar se obtiene:

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{1+y^2}$$

$$\ln|x| = \arctan(y) + C_1$$

Se aplica la definición de logaritmo natural, si $\ln b = c$, entonces $e^c = b$

$$x = e^{\arctan(y) + C_1}$$

$$x = e^{\arctan(y)} \cdot e^{C_1}$$

$$x = e^{\arctan(y)} \cdot C$$

$$x = Ce^{\arctan(y)}$$

Por tanto, la solución es:

$$x = Ce^{\arctan(y)}$$

Otra forma de representar la solución es la siguiente:

$$\ln|x| = \arctan(y) + C_1$$

$$\ln|x| - C_1 = \arctan(y)$$

Se sustituye $\ln C = -C_1$

$$\ln|x| + \ln C = \arctan(y)$$

Se aplica la propiedad $\ln ab = \ln a + \ln b$

$$\ln|Cx| = \arctan(y)$$

Se obtiene la tangente de cada término de la igualdad

$$\tan(\ln|Cx|) = \tan(\arctan(y))$$
$$\tan(\ln|Cx|) = y$$

Finalmente, la solución es:

$$\tan(\ln|Cx|) = y$$

5 Resuelve $e^{-y}(1 + y') = 1$

Solución

Se resuelve el producto

$$e^{-y}(1 + y') = 1$$
$$e^{-y} + e^{-y}y' = 1$$

La ecuación se transforma en:

$$e^{-y} + e^{-y}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$e^{-y}\frac{dy}{dx} = 1 - e^{-y}$$

$$e^{-y}\,dy = (1 - e^{-y})dx$$

$$\frac{e^{-y}dy}{1-e^{-y}} = dx$$

Se integra cada término de la igualdad

$$\int\frac{e^{-y}dy}{1-e^{-y}} = \int dx$$

$$\ln|1 - e^{-y}| = x + C_1$$

$$\ln|1 - e^{-y}| - C_1 = x$$

$$\ln|1 - e^{-y}| + \ln|C| = x$$

$$\ln|C(1 - e^{-y})| = x$$

$$C(1 - e^{-y}) = e^x$$

Por consiguiente, la solución es:

$$e^x = C(1 - e^{-y})$$

6 Determina la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

para la cual

$$y = 2$$

cuando

$$x = 0$$

Solución

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

$$2y\,dy = 3x^2\,dx$$

$$\int 2y\,dy = \int 3x^2 dx$$

$$y^2 = x^3 + C$$

En la solución general se sustituyen los valores de: $y = 2, x = 0$

$$y^2 = x^3 + C$$

$$(2)^2 = (0)^3 + C$$

Por tanto,

$$C = 4$$

Este resultado se sustituye en la solución general, se despeja y

$$y^2 = x^3 + C$$

$$y = \sqrt{x^3 + C}$$

$$y = \sqrt{x^3 + 4}$$

Por tanto, la ecuación particular es:

$$y = \sqrt{x^3 + 4}$$

7 Cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración debida a la gravedad de un cuerpo que cae es de $9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, esto es posible si se desprecia la resistencia del aire. Si se arroja un cuerpo hacia arriba desde una altura inicial de 30 m, con una velocidad de $20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, determina su velocidad y su altura tres segundos más tarde.

Solución

La altura s se tomara positiva hacia arriba, entonces la velocidad v es positiva, pero la aceleración a es negativa ya que la atracción de la gravedad tiende a disminuir v, por tanto la solución esta dada por la ecuación diferencial.

$$\frac{dv}{dt} = -9.81$$

Con las condiciones iniciales

$$v = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{y} \quad s = 30 \text{ m}$$

La ecuación $\frac{dv}{dt} = -9.81$, se resuelve por el método de variables separables, es decir:

$$\frac{dv}{dt} = -9.81$$

$$dv = -9.81\,dt$$

$$\int dv = -\int 9.81dt + C$$

$$v = -9.81t + C$$

En el instante $t = 0$, $v = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, entonces

$$v = -9.81t + C$$

$$20 = -9.81(0) + C$$

$$C = 20$$

Por tanto

$$v = -9.81t + 20$$

Luego, $v = \frac{ds}{dt}$, entonces se tiene una segunda ecuación diferencial.

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$\frac{ds}{dt} = -9.81t + 20$$

Al resolver la ecuación diferencial por variables separables resulta:

$$\frac{ds}{dt} = -9.81t + 20$$

$$\int ds = \int(-9.81t + 20)dt + K$$

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + K$$

Se determina el valor de K, con los valores iniciales $s = 30$, $t = 0$

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + K$$

$$30 = -\frac{9.81}{2}(0)^2 + 20(0) + K$$

Por tanto, $K = 30$, entonces la solución es:

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + 30$$

Finalmente se obtiene el valor de la velocidad y la altura 3 s más tarde.

$$v = -9.81t + 20 = -9.81(3) + 20 = -29.43 + 20 = -9.43\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + 30 = -\frac{9.81}{2}(3)^2 + 20(3) + 30 = (-4.905)(9) + 20(3) + 30 = -44.14 + 60 + 30 = 45.86\text{ m}$$

8 Se tiene un cultivo con una cantidad N_0 de bacterias, al pasar una hora el número de bacterias es de $\frac{5}{2}N_0$. Si la razón en la que se reproducen es proporcional al número de bacterias, ¿en cuánto tiempo se cuadriplicará la cantidad inicial de bacterias?

Solución

Si la razón de reproducción, la variación de N_0 respecto al tiempo $\left(\frac{dN_0}{dt}\right)$, es proporcional al número de bacterias, entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dN_0}{dt} = kN_0$$

La cual es una ecuación de variables separables, al resolverla se obtiene:

$$\frac{dN_0}{N_0} = kdt$$

$$\ln N_0 = kt + C_1$$

$$e^{kt+C_1} = N_0$$

$$N_0(t) = e^{kt+C_1}$$

$$N_0(t) = e^{kt}e^{C_1}$$

donde

$$N_0(t) = Ce^{kt}$$

Cuando $t = 0$ entonces $N_0(0) = Ce^{k(0)} = Ce^0 = C(1) = C$, pero sabemos que la cantidad inicial de bacterias es N_0, es decir $C = N_0$, por tanto $N_0(t) = N_0e^{kt}$.

Encontremos el valor de k, para eso tenemos que $N_0(1) = \frac{5}{2}N_0$, de donde

$$N_0e^{k(1)} = \frac{5}{2}N_0$$

$$N_0e^{k} = \frac{5}{2}N_0$$

Se divide entre N_0

$$e^k = \frac{5}{2}$$

Se aplica logaritmo natural en ambos lados

$$\ln e^k = \ln\frac{5}{2}$$

$$k = \ln\frac{5}{2}$$

$$k = 0.9163$$

Por tanto. la función solución a nuestro problema es $N_0(t) = N_0 e^{0.9163t}$

Si queremos saber en cuánto tiempo se cuadriplicará la población, entonces se plantea la siguiente igualdad:

$$4\,N_0 = N_0 e^{0.9163t}$$

Se divide entre N_0

$$4 = e^{0.9163t}$$

Se aplica el logaritmo natural en ambos miembros:

$$\ln 4 = \ln e^{0.9163t}$$

$$\ln 4 = 0.9163t$$

$$\frac{\ln 4}{0.9163} = t$$

$$t \approx 1.51$$

En aproximadamente 1.51 horas se cuadriplicará la población inicial.

9 Al analizar el hueso de un fósil se encontró que la cantidad de carbono 14 era la centésima parte de la cantidad original. ¿Cuál es la edad del fósil?

Solución

Existe un método basado en la cantidad de carbono 14 (C − 14) que existe en los fósiles. El químico Willard Libby inventó la teoría de la datación con radiocarbono, la cual se basa en que la razón de la cantidad de carbono 14 en la atmósfera es constante, lo que trae como consecuencia que la cantidad de este isótopo en los organismos es proporcional al que existe en la atmósfera. Al morir un organismo deja de absorber carbono 14, es decir la cantidad absorbida de este elemento cesa, y al ser un elemento radiactivo se va desintegrando (recuerda que la vida media de un elemento radiactivo es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de este elemento). Entonces basta con comparar la cantidad proporcional de carbono 14 en el fósil con la cantidad constante en la atmósfera. Para hacer esto se toma en cuenta la vida media del carbono 14 que es aproximadamente de 5600 años.

Ahora regresemos a nuestro problema: digamos que C_0 es la cantidad inicial de carbono 14 en el fósil, entonces la variación de esta cantidad respecto al tiempo es proporcional a la cantidad inicial, es decir:

$$\frac{dC_0}{dt} = kC_0$$

en donde

$$C_0 = C_0(0)$$

La ecuación diferencial obtenida es parecida al modelo del ejemplo 10, al resolverlo se obtiene:

$$C_0(t) = C_0 e^{kt}$$

Para obtener el valor de k, consideremos que la vida media del carbono 14 es de 5600 años, esto quiere decir que:

$$\frac{C_0}{2} = C_0(5600)$$

$$\frac{C_0}{2} = C_0 e^{5600k}$$

Se divide entre C_0

$$\frac{1}{2} = e^{5600k}$$

Se aplica el logaritmo natural en ambos miembros

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{5600k}$$

$$\ln\frac{1}{2} = 5600k$$

$$\frac{\ln\frac{1}{2}}{5600} = k$$

$$k = -0.00012378$$

Por tanto,

$$C_0(t) = C_0 e^{-0.00012378t}$$

Si nos dicen que la cantidad de carbono 14 era la centésima parte de la cantidad original, entonces basta con plantear la siguiente igualdad.

$$\frac{C_0}{100} = C_0 e^{-0.00012378t}$$

$$\frac{1}{100} = e^{-0.00012378t}$$

$$\ln\frac{1}{100} = \ln e^{-0.00012378t}$$

$$\ln\frac{1}{100} = -0.00012378t$$

$$\frac{\ln\frac{1}{100}}{-0.00012378} = t$$

de donde

$$t \approx 37\,204$$

Por tanto, el fósil tiene aproximadamente 37 200 años.

EJERCICIO 29

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3}{y^2}$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{y(1-x^3)}$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{5+y^2}$
4. $(4 - y^2)dx - (4 - x^2)dy = 0$
5. $(9 + y^2)dx + 4xy\, dy = 0$
6. $(2y^2 - xy^2)y' + 2x^2 - yx^2 = 0$
7. $x\sqrt{y^2-2}\, dx + y\sqrt{x^2-2}\, dy = 0$
8. $e^{3y}(y' + 3) = 2$
9. $\dfrac{dy}{dx} = \cos^2 y \cos 2x$
10. $y' = \cos(x + y)$
11. $(-4y + y^2)dx + x(x - 6)dy = 0$
12. $4x^3 - y^3y' = 0$
13. $y' = \dfrac{2x+1}{y^3+1}$
14. $e^x dx - \dfrac{1}{y}dy = 0$
15. $\dfrac{3}{x}dx + \dfrac{2}{y}dy = 0$
16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2y-y}{y+4}$
17. $y' = x^2 \operatorname{sen} 2x$
18. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x-3y}$
19. $ydx + x\ln xdy = 0$
20. $(1 + e^x)e^y y' = y^{-1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuaciones homogéneas

$f(x, y)$ es una función homogénea de grado n si $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$
Por ejemplo: $f(x, y) = 3x^4 - x^2y^2$ es homogénea, hagamos la evaluación:

$$f(\alpha x, \alpha y) = 3(\alpha x)^4 - (\alpha x)^3(\alpha y) = 3\alpha^4x^4 - \alpha^4x^3y = \alpha^4(3x^4 - x^3y) = \alpha^4 f(x, y)$$
$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^4 f(x, y)$$

por tanto es homogénea de grado 4.

Una ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se llama homogénea si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas.

Por ejemplo:

La ecuación $\dfrac{x^2}{y}\operatorname{arc\,cos}\dfrac{x}{y}dy + x\ln\dfrac{x}{y}dx = 0$ es homogénea ya que para

$$M(x, y) = \frac{x^2}{y}\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{y} \quad \text{y} \quad N(x, y) = x\ln\frac{x}{y}$$

se tiene que:

$$M(\alpha x, \alpha y) = \frac{(\alpha x)^2}{\alpha y}\operatorname{arc\,cos}\frac{\alpha x}{\alpha y} = \frac{\alpha^2x^2}{\alpha y}\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{y} = \alpha\frac{x^2}{y}\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{y} = \alpha M(x, y)$$

$$N(\alpha x, \alpha y) = \alpha x\ln\frac{\alpha x}{\alpha y} = \alpha x\ln\frac{x}{y} = \alpha N(x, y)$$

Ambas son homogéneas de grado 1, por tanto, la ecuación $\frac{x^2}{y}\text{arc cos}\frac{x}{y}dy + x\ln\frac{x}{y}dx = 0$ es homogénea.

Para resolver una ecuación homogénea se utiliza la siguiente transformación:

$$y = vx \quad \text{de donde} \quad dy = vdx + xdv$$

Ejemplo

Resuelve la ecuación $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$

Solución

Sustituimos $y = vx$ de donde $dy = v\,dx + x\,dv$ en la ecuación:

$$(4x - 3(vx))dx + (2(vx) - 3x)(vdx + xdv) = 0$$

$$(4x - 3vx)dx + (2vx - 3x)(vdx + xdv) = 0$$

Se multiplica y simplifica:

$$4xdx - 3vxdx + 2v^2xdx + 2vx^2dv - 3xvdx - 3x^2dv = 0$$

$$(2v^2x - 3vx - 3vx + 4x)dx + (2vx^2 - 3x^2)dv = 0$$

$$(2v^2 - 6v + 4)xdx + (2v - 3)x^2dv = 0$$

$$2(v^2 - 3v + 2)xdx + (2v - 3)x^2dv = 0$$

Se multiplica por el factor $\frac{1}{x^2(v^2 - 3v + 2)}$

$$\frac{2(v^2 - 3v + 2)xdx}{x^2(v^2 - 3v + 2)} + \frac{(2v - 3)x^2dv}{x^2(v^2 - 3v + 2)} = 0$$

$$\frac{2dx}{x} + \frac{(2v - 3)dv}{v^2 - 3v + 2} = 0$$

$$\frac{2dx}{x} = -\frac{(2v - 3)dv}{v^2 - 3v + 2}$$

Se integra

$$2\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{(2v - 3)dv}{v^2 - 3v + 4}$$

$$2\ln x + C_1 = -\ln|v^2 - 3v + 2| + C_2$$

$$2\ln x + \ln|v^2 - 3v + 2| = C_2 - C_1$$

Se hace la sustitución $C_3 = C_2 - C_1$ y se aplican las propiedades $\ln a^n = n\ln a$,

$$\ln x^2|v^2 - 3v + 2| = C_3$$

Se aplica la definición de logaritmo $\ln b = c$ quiere decir $e^c = b$

$$x^2(v^2 - 3v + 2) = e^{C_3}$$

Se sustituye $C = e^{C_3}$

$$x^2(v^2 - 3v + 2) = C$$

De $y = vx$ se despeja v, $v = \dfrac{y}{x}$ para sustituirla en la función.

$$x^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2\right) = C$$

$$x^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2\right) = C$$

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 3\frac{y}{x} + 2\right) = C$$

$$\frac{x^2y^2}{x^2} - \frac{3x^2y}{x} + 2x^2 = C$$

$$y^2 - 3xy + 2x^2 = C$$

Se factoriza

$$(y - 2x)(y - x) = C$$

Por tanto, la solución es

$$(y - 2x)(y - x) = C$$

Existen ecuaciones que son lineales pero no homogéneas, aunque se pueden reducir a ellas, haciendo una traslación. Estas ecuaciones tienen la forma:

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

En donde si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, la ecuación se reduce a la forma homogénea

$$(a_1x' + b_1y')dx' + (a_2x' + b_2y')dy' = 0$$

Al hacer una traslación por medio de las transformaciones:

$$x = x' + h \qquad dx = dx'$$
$$y = y' + k \qquad dy = dy'$$

(h, k) es el punto de intersección de las rectas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, la ecuación se reduce a una ecuación de variables separables

$$P(x, t)dx + Q(x, t)dt = 0$$

Mediante la transformación $a_1x + b_1y = t$ de donde

$$dy = \frac{dt - a_1dx}{b_1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación

$$(2x - y + 4)dx + (3x + 2y - 1)dy = 0$$

Solución

Tenemos la ecuación

$$(2x - y + 4)dx + (3x + 2y - 1)dy = 0$$

En donde $(2)(2) - (3)(-1) = 4 + 3 = 7 \neq 0$, por tanto resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - y + 4 &= 0 \\ 3x + 2y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Al resolverlo se obtiene que el punto $(h, k) = (-1, 2)$, se sustituye en las fórmulas de transformación:

$$\begin{aligned} x &= x' + h & y &= y' + k \\ x &= x' - 1 & y &= y' + 2 \\ dx &= dx' & dy &= dy' \end{aligned}$$

Posteriormente en la ecuación dada:

$$\begin{aligned} (2[x' - 1] - [y' + 2] + 4)dx' + (3[x' - 1] + 2[y' + 2] - 1)dy' &= 0 \\ (2x' - 2 - y' - 2 + 4)dx' + (3x' - 3 + 2y' + 4 - 1)dy' &= 0 \\ (2x' - y')dx' + (3x' + 2y')dy' &= 0 \end{aligned}$$

Se obtuvo una ecuación homogénea y se sustituye $y' = vx'$ $dy' = vdx' + x'dv$

$$\begin{aligned} (2x' - vx')dx' + (3x' + 2vx')(vdx' + x'dv) &= 0 \\ 2x'dx' - vx'dx' + 3x'vdx' + 3x'^2dv + 2v^2x'dx' + 2vx'^2dv &= 0 \\ 2v^2x'dx' + 2vx'dx' + 2x'dx' + 2vx'^2dv + 3x'^2dv &= 0 \\ 2(v^2 + v + 1)x'dx' + (2v + 3)x'^2dv &= 0 \end{aligned}$$

Se multiplica por el factor: $\dfrac{1}{x'^2(v + v + 1)}$

$$\frac{2(v^2 + v + 1)x'dx'}{x'^2(v^2 + v + 1)} + \frac{(2v + 3)x'^2\,dv}{x'^2(v^2 + v + 1)} = 0$$

$$\frac{2dx'}{x'} = -\frac{(2v + 3)dv}{v^2 + v + 1}$$

Se integran ambos lados

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+3)dv}{v^2+v+1}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1+2)dv}{v^2+v+1}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1)dv}{v^2+v+1}-\int\frac{2dv}{v^2+v+1}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1)dv}{v^2+v+1}-2\int\frac{dv}{\left(v^2+v+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4}}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1)dv}{v^2+v+1}-2\int\frac{dv}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$2\ln x'+C_1=-\ln(v^2+v+1)-2\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\left(\frac{v+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]+C_2$$

$$2\ln x'+\ln(v^2+v+1)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\frac{2v+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]=C_2-C_1$$

$$\ln x'^2(v^2+v+1)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2v+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right]=C$$

Al sustituir $v=\dfrac{y'}{x'}$

$$\ln x'^2\left(\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+\frac{y'}{x'}+1\right)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\left(\frac{y'}{x'}\right)+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right]=C$$

$$\ln x'^2\left(\frac{y'^2}{x'^2}+\frac{y'}{x'}+1\right)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\frac{2y'+\sqrt{3}x'}{x'}}{\sqrt{3}}\right)\right]=C$$

$$\ln x'^2\left(\frac{y'^2+x'y'+x'^2}{x'^2}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y'+\sqrt{3}x'}{\sqrt{3}x'}\right)=C$$

Se sustituye $x'=x+1$, $y'=y-2$

$$\ln(x+1)^2\left(\frac{(y-2)^2+(x+1)(y-2)+(x+1)^2}{(x+1)^2}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2(y-2)+\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{3}(x+1)}\right)=C$$

2 Resuelve la ecuación:

$$(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0$$

Solución

En la ecuación se tiene que $(1)(-6) - (3)(-2) = -6 + 6 = 0$, entonces utilizamos la transformación:

$$a_1x + b_1y = t, \qquad dy = \frac{dt - a_1dx}{b_1}$$

$$x - 2y = t, \qquad dy = \frac{dt - dx}{-2} = -\frac{dt - dx}{2}$$

Se sustituye en la ecuación:

$$(x - 2y - 1)dx + (3(x - 2y) + 2)dy = 0$$

$$(t - 1)dx + (3t + 2)\left(-\frac{dt - dx}{2}\right) = 0$$

$$tdx - dx - \frac{3}{2}tdt + \frac{3}{2}tdx - dt + dx = 0$$

$$tdx - \frac{3}{2}tdt + \frac{3}{2}tdx - dt = 0$$

$$2tdx - 3tdt + 3tdx - 2dt = 0$$

$$5tdx - (3t + 2)dt = 0$$

$$5tdx = (3t + 2)dt$$

Se multiplica por el factor $\frac{1}{t}$

$$\frac{1}{t}(5tdx = (3t + 2)dt)$$

$$5dx = 3dt + \frac{2}{t}dt$$

Se integran ambos miembros

$$5\int dx = 3\int dt + 2\int \frac{dt}{t}$$

$$5x = 3t + 2\ln t + C$$

$$5x = 3(x - 2y) + 2\ln(x - 2y) + C_1$$

$$5x = 3x - 6y + 2\ln(x - 2y) + C_1$$

$$2x + 6y - 2\ln(x - 2y) = C_1$$

Se multiplica por el factor $\frac{1}{2}$

$$x + 3y - \ln(x - 2y) = \frac{1}{2}C_1$$

Se sustituye $C = \frac{1}{2}C_1$

$$x + 3y - \ln(x - 2y) = C$$

Por tanto, la solución es:

$$x + 3y - \ln(x - 2y) = C$$

EJERCICIO 30

1. $xdy = (2x + 2y)dx$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3xy + y^2}{x^2}$
3. $xy\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + 2y^2$
4. $y' = \dfrac{x - y}{2x}$
5. $\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x} - 3\dfrac{x}{y}$
6. $(x^2 - y^2)y' = xy$
7. $(4x^2 - 5xy + y^2) + x^2y' = 0$
8. $(x^2 + y^2)y' = y^2$
9. $(2x - y)dy = (2y + x)dx$
10. $y' = \dfrac{y}{x} + 4\sec\dfrac{y}{x}$
11. $(x - y)y' + (y - 2x) = 0$
12. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$
13. $(x + y)y' + y = x$
14. $x\dfrac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}}$
15. $(y^2 - 5xy)y' - (xy - 5x^2) = 0$
16. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$
17. $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$
18. $(x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0$
19. $(2x - 5y + 3)dx + (-2x - 4y + 6)dy = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Solución a los ejercicios de cálculo diferencial

CAPÍTULO 1

EJERCICIO 1

1. Función	6. Relación	11. Función
2. Relación	7. Función	12. Relación
3. Función	8. Relación	13. Función
4. Relación	9. Función	14. Función
5. Función	10. Relación	15. Relación

EJERCICIO 2

1. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$ $f(3) = 15, f(0) = -3$
2. $f(a) = a^2 - 5a + 6,$
   $f(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 - 5a - 5b + 6$
   $f(x + h) = 3x^2 + 6hx + 3h^2 + 4x + 4h - 2$
3. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 6x + 3h + 4$
4. $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{5}, f\left(-\frac{1}{2}\right) =$ No existe
   $f(x + h) - f(x) = \frac{4h}{(2x+2h+1)(2x+1)}$
5. $f(5) = 3, f(4) = 0, f(6) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$
   $f(3) =$ No está definida
6. $f(x + h) = \sqrt{x^2+2xh+h^2-3}$
   $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2-3}+\sqrt{x^2-3}}$
7. $\frac{f(x+b)-f(x)}{b} = -\frac{1}{(x+b+1)(x+1)}$
8. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{1}{\sqrt{1-(x+h)}+\sqrt{1-x}}$
9. $f(1) = \frac{4}{3}, f(0) = \frac{5}{2}, f(x + 5) = \frac{|x|}{x+7}$
10. $f(-1) = 2, f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x^2} + 2x^2 - 3x$

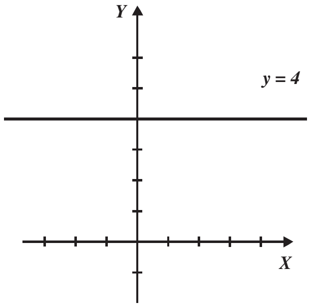
Las demostraciones de los ejercicios 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y 18, se dejan al estudiante.

EJERCICIO 3

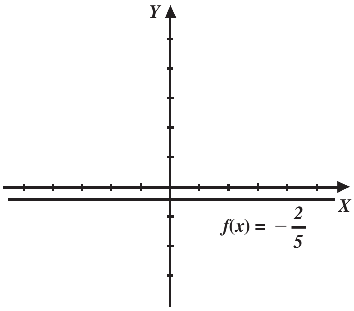
1. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
2. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
3. $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty) = \{x \in R| x \neq -3\}$
4. $(-\infty, 5) \cup (5, \infty) = \{x \in R| x \neq 5\}$
5. $(-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, \infty) = \{x \in R| x \neq -4, x \neq 4\}$
6. $(-\infty, 0) \cup (0, 5) \cup (5, \infty) = \{x \in R| x \neq 0, x \neq 5\}$
7. $(-\infty, 2) \cup (2, 5) \cup (5, \infty) = \{x \in R| x \neq 2, x \neq 5\}$
8. $(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty) = \{x \in R| x \neq -5, x \neq 5\}$
9. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
10. $(-\infty, -5) \cup (-5, 0) \cup (0, \infty) = \{x \in R| x \neq -5, x \neq 0\}$
11. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty) = \{x \in R| x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1\}$
12. $[-1, \infty) = \{x \geq -1\}$
13. $[6, \infty) = \{x \geq 6\}$
14. $(-\infty, 2] = \{x \leq 2\}$
15. $(-\infty, 4] = \{x \leq 4\}$
16. $(-\infty, -5] \cup [5, \infty) = \{x \in R| x \leq -5 \text{ o } x \geq 5\}$
17. $(-\infty, -1] \cup [6, \infty) = \{x \in R| x \leq -1 \text{ o } x \geq 6\}$
18. $[-6, 6] = \{x \in R| -6 \leq x \leq 6\}$
19. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
20. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
21. $[5, \infty) = \{x \in R| x \geq 5\}$
22. $(2, \infty) = \{x \in R| x > 2\}$
23. $(-\infty, 3) = \{x \in R| x < 3\}$
24. $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty) = \{x \in R| x \neq -2\}$
25. $(-\infty, -4] \cup (3, \infty) = \{x \in R| x \leq -4 \text{ o } x > 3\}$
26. $\left[1, \frac{3}{2}\right) = \left\{x \in R| 1 \leq x < \frac{3}{2}\right\}$
27. $(-2, \infty) = \{x \in R| x \geq -2\}$
28. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right) = \left\{x \in R| x < \frac{5}{2}\right\}$
29. $(0, \infty) = \{x \in R| x > 0\}$
30. $(-1, 3) = \{x \in R| -1 < x < 3\}$
31. $[1, \infty) = \{y \in R| y \geq 1\}$
32. $[-4, \infty) = \{y \in R| y \geq -4\}$
33. $(-\infty, 9] = \{y \in R| y \leq 9\}$
34. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right] = \left\{y \in R| y \leq \frac{9}{4}\right\}$
35. $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty) = \{y \in R| y \neq -2\}$
36. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right) = \left\{y \in R| y \neq \frac{1}{2}\right\}$
37. $[1, \infty) = \{y \in R| y \geq 1\}$
38. $(-\infty, 0] = \{y \in R| y \leq 0\}$
39. $[0, 2] = \{y \in R| 0 \leq y \leq 2\}$
40. $(0, 1] = \{y \in R| 0 < y \leq 1\}$
41. $[0, 1) \cup (1, \infty) = \{x \in R| 0 \leq y < 1 \text{ o } y > 1\}$
42. $[0, \infty) = \{y \in R| y \geq 0\}$

EJERCICIO 4

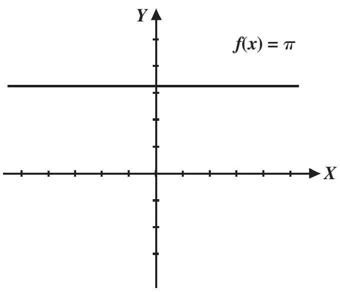
1.



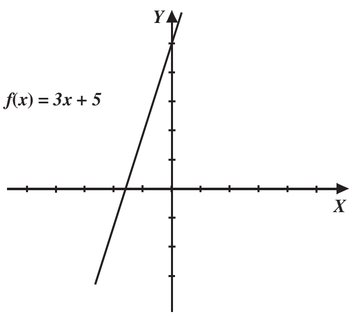
2.



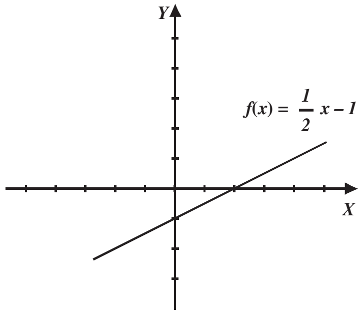
3.



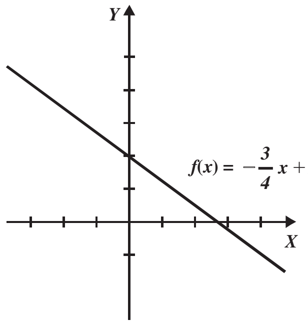
4.



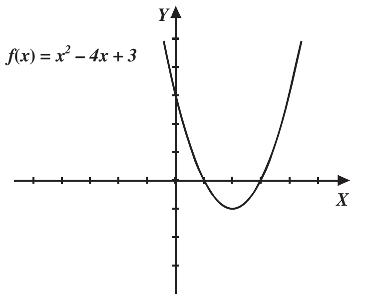
5.



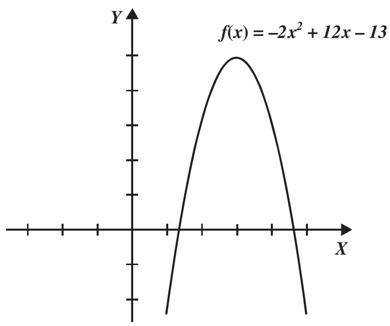
6.



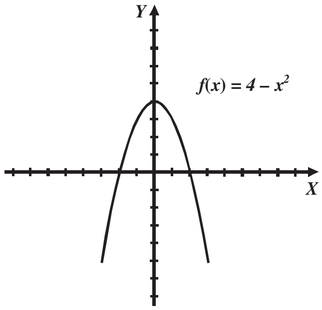
7.



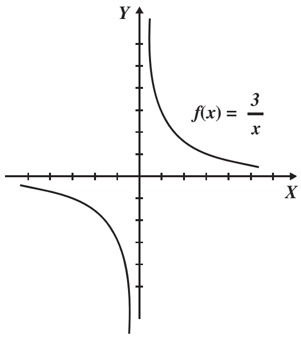
8.



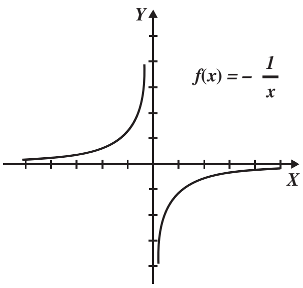
9.



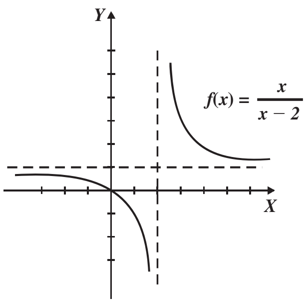
10.



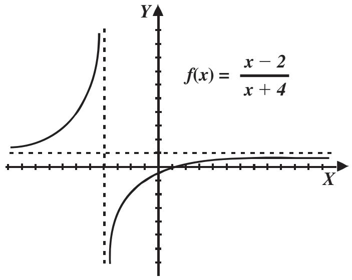
11.



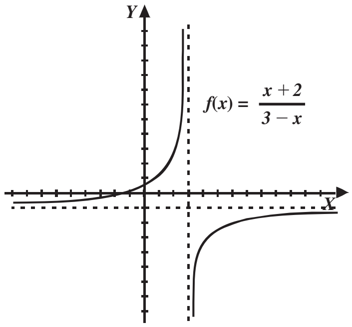
12.



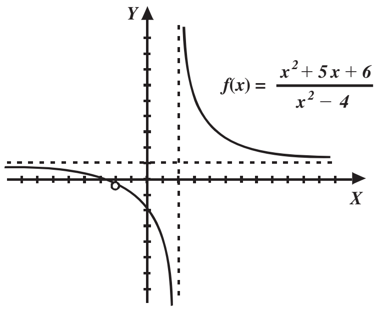
13.



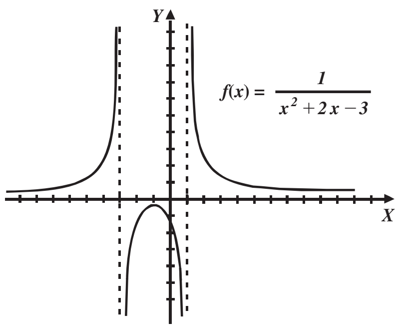
14.



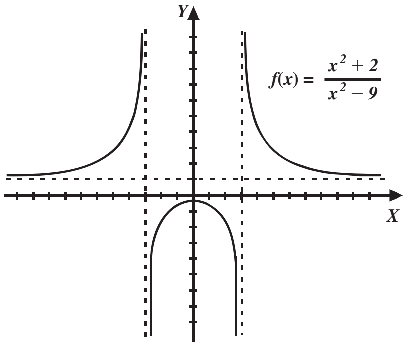
15.



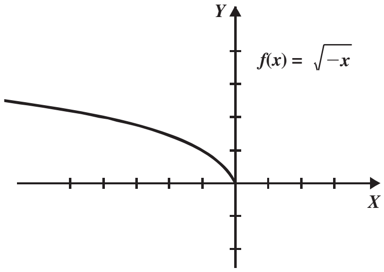
16.



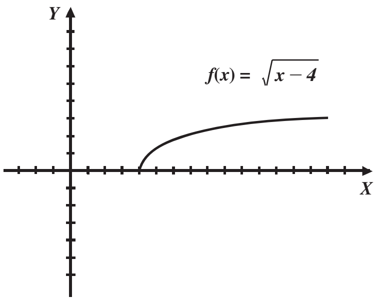
17.



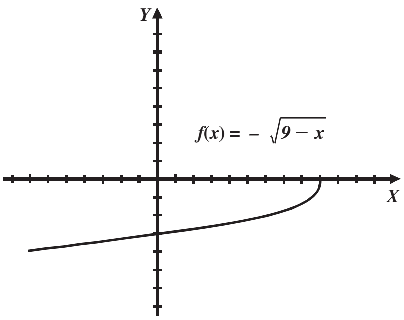
18.



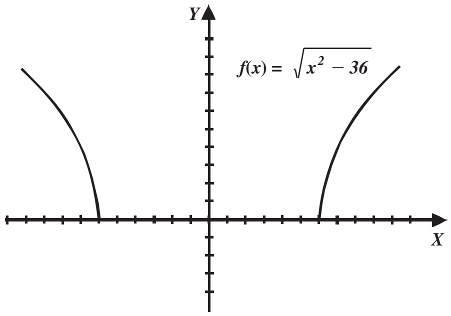
19.



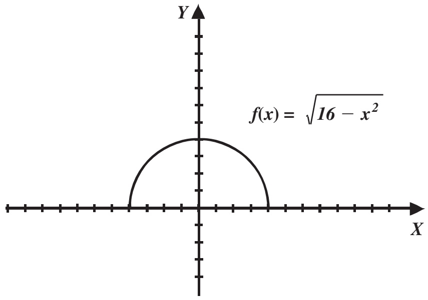
20.



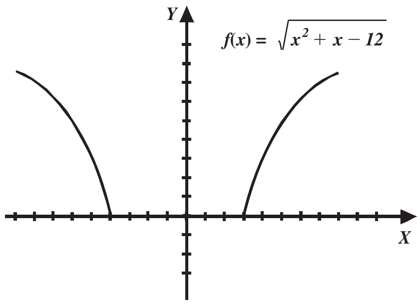
21.



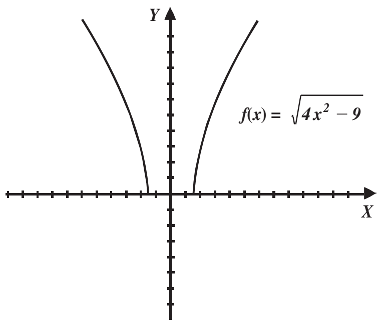
22.



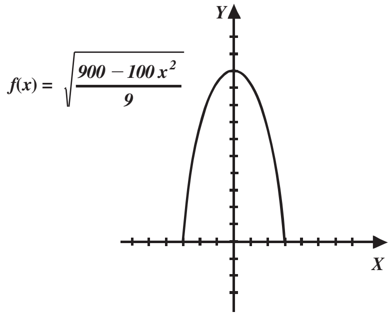
23.



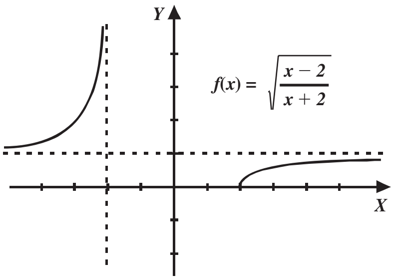
24.



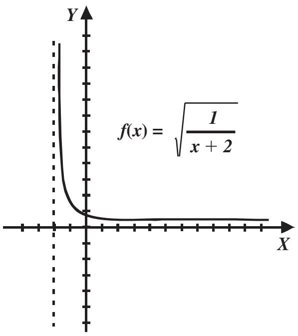
25.



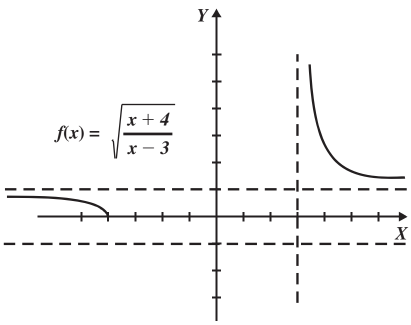
26.



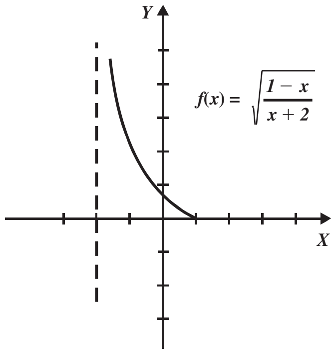
27.



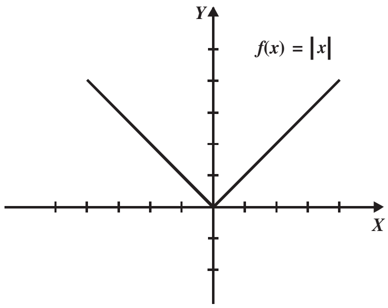
28.



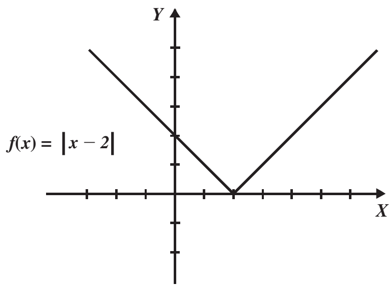
29.



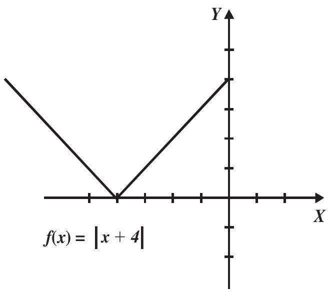
30.



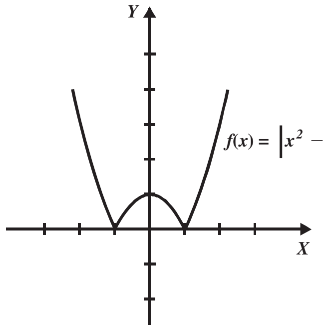
31.



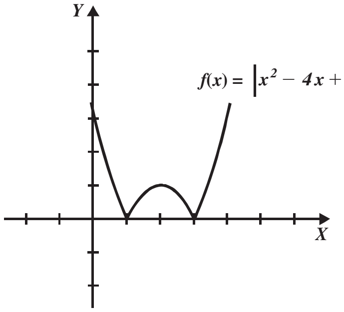
32.



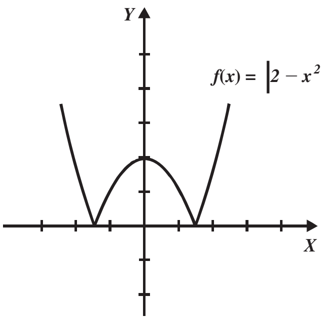
33.



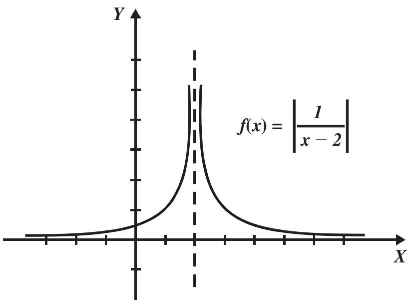
34.



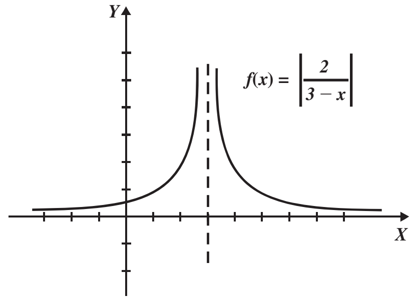
35.



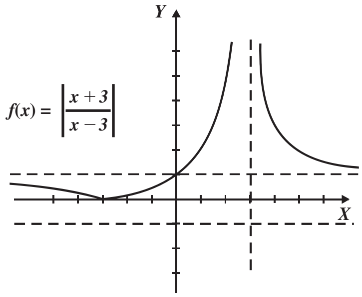
36.



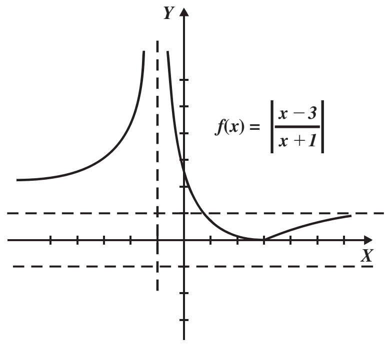
37.



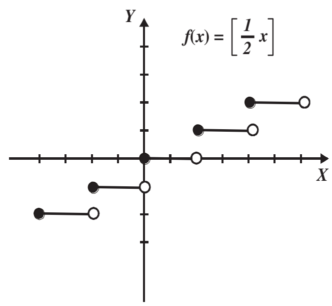
38.



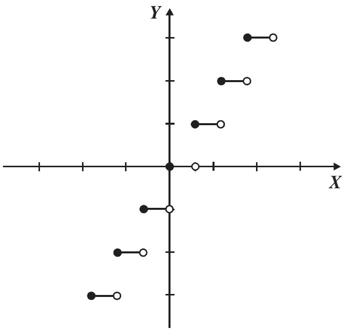
39.



40.

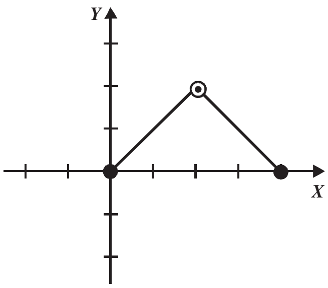


41.

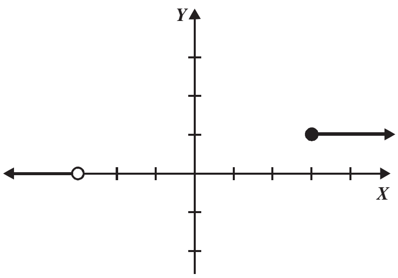


EJERCICIO 5

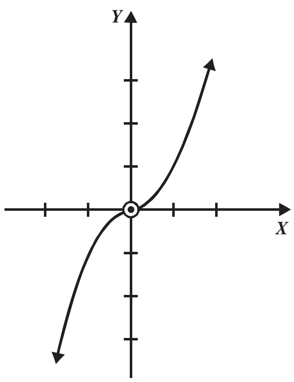
1.



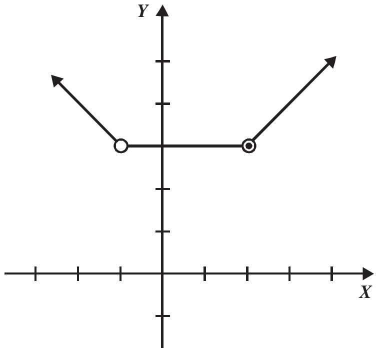
2.



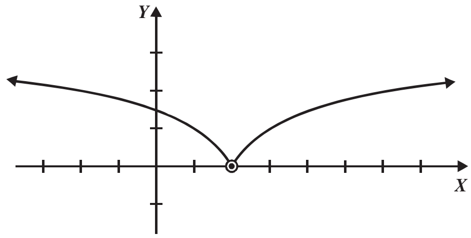
3.



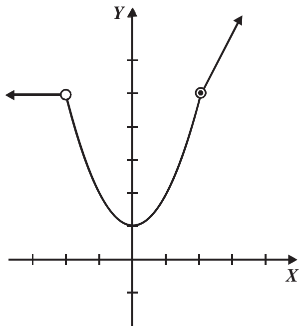
4.



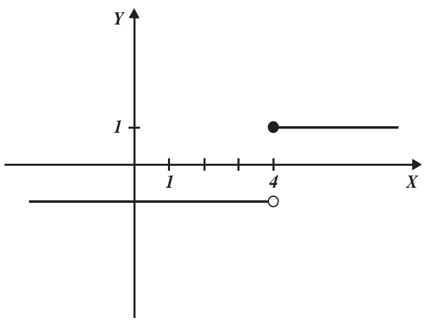
5.



6.

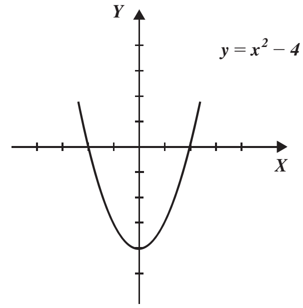


7.

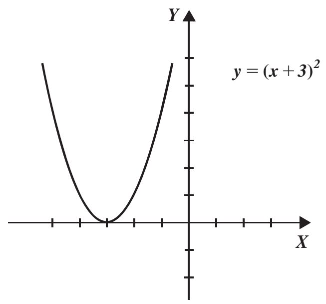


EJERCICIO 6

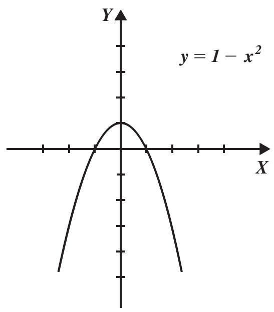
1.



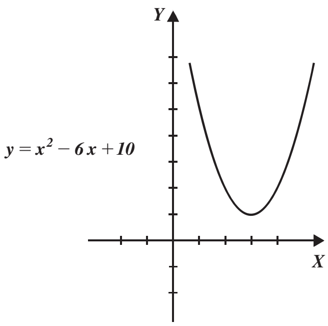
2.



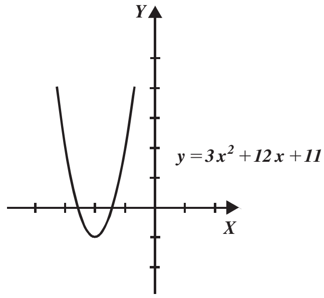
3.



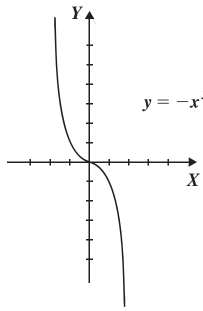
4.



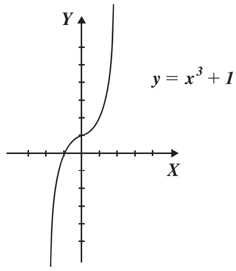
5.



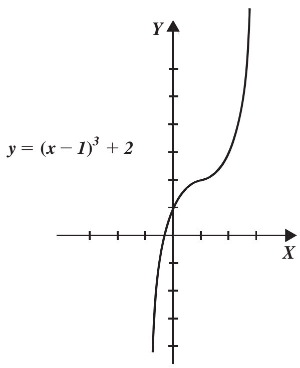
6.



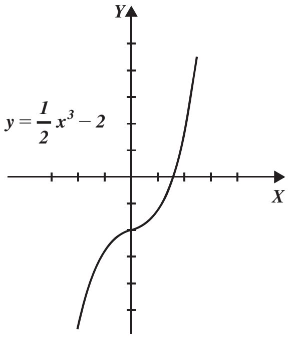
7.



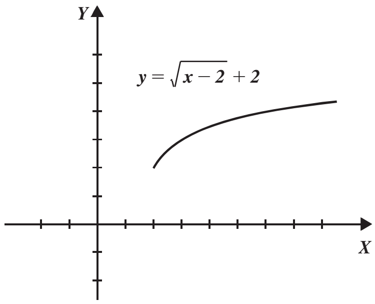
8.



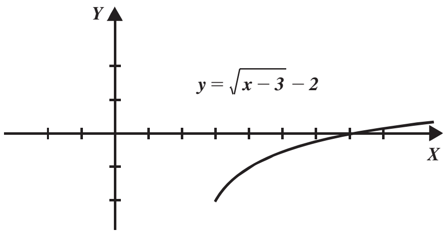
9.



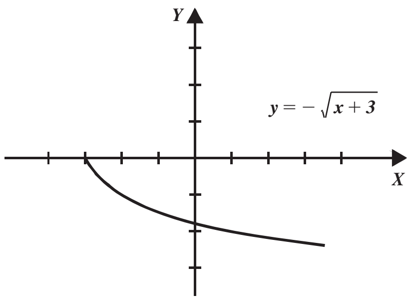
10.



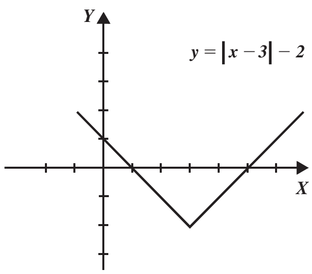
11.



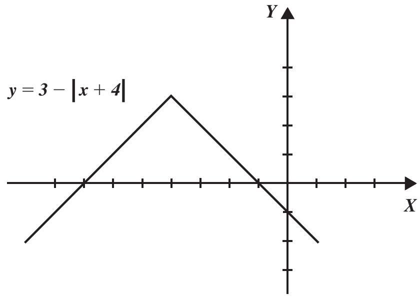
12.



13.



14.



EJERCICIO 7

1. Crece: $(0, \infty)$
2. Decrece: $(-\infty, 0)$
   Crece: $(0, \infty)$
3. Crece: $(-\infty, +\infty)$
4. Decrece: $(-\infty, 0)$
   Crece: $(0, \infty)$
5. Crece: $(2, \infty)$
6. Decrece: $(-\infty, -3)$
7. Decrece: $(0, \infty)$
   Crece: $(-\infty, 0)$
8. Decrece: $(-\infty, 3)$
   Crece: $(3, \infty)$
9. Decrece: $(0, 3)$
   Crece: $(-3, 0)$
10. No crece ni decrece, permanece constante

EJERCICIO 8

1. Biyectiva
2. Ninguna
3. Ninguna
4. Biyectiva
5. Inyectiva
6. Ninguna
7. Biyectiva
8. Inyectiva
9. Suprayectiva
10. Biyectiva

EJERCICIO 9

1. $f(x) + g(x) = 3$
   $f(x) - g(x) = 7$
   $f(x) \cdot g(x) = -10$
   $\dfrac{f(x)}{g(x)} = -\dfrac{5}{2}$
2. $f(x) + g(x) = 4x$
   $f(x) - g(x) = -10$
   $f(x) \cdot g(x) = 4x^2 - 25$
   $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2x-5}{2x+5}$

3. $f(x) + g(x) = 2x^2 - x - 3$
$f(x) - g(x) = -7(x + 1)$
$f(x) \cdot g(x) = x^4 - x^3 - 15x^2 - 23x - 10$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x-5}{x+2}$

4. $f(x) + g(x) = \dfrac{8x+1}{6}$
$f(x) - g(x) = \dfrac{4x-7}{6}$
$f(x) \cdot g(x) = \dfrac{2x^2+3x-2}{6}$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{6x-3}{2x+4}$

5. $f(x) + g(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{x+4}$
$f(x) - g(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{x+4}$
$f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x^2+x-12}$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+4}} = \dfrac{\sqrt{x^2+x-12}}{x+4}$

6. $f(x) + g(x) = x + 2\sqrt{x}$
$f(x) - g(x) = x$
$f(x) \cdot g(x) = x + x\sqrt{x}$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{x} + 1$

7. $f(x) + g(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
$f(x) - g(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$
$f(x) \cdot g(x) = \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2x$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$

8. $D_f \cap D_g = \{-1, 3, 5\}$
$f + g = \{(-1, 12), (3, 20), (5, 23)\}$
$f - g = \{(-1, -8), (3, -8), (5, -9)\}$
$f \cdot g = \{(-1, 20), (3, 84), (5, 112)\}$
$\dfrac{f}{g} = \left\{\left(-1, \dfrac{1}{5}\right), \left(3, \dfrac{3}{7}\right), \left(5, \dfrac{7}{16}\right)\right\}$

9. $D_f \cap Dg = \{-2, -1, 0\}$
$f + g = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2)\}$
$f - g = \{(-2, -10), (-1, -7), (0, -4)\}$
$f \cdot g = \{(-2, -25), (-1, -12), (0, -3)\}$
$\dfrac{f}{g} = \left\{(-2, -1), \left(-1, -\dfrac{3}{4}\right), \left(0, -\dfrac{1}{3}\right)\right\}$

10. $D_f \cap D_g = \{-1, 1, 2\}$
$f + g = \{(-1, 1), (1, 1), (2, 1)\}$
$f - g = \{(-1, -3), (1, 1), (2, 0)\}$
$f \cdot g = \left\{(-1, -2), (1, 0), \left(2, \dfrac{1}{4}\right)\right\}$
$\dfrac{f}{g} = \left\{\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right), (2, 1)\right\}$

11. $f(x) + r(x) = 2x + 5$
12. $f(x) - s(x) = -x^2 + 4x + 13$
13. $g(x) \cdot s(x) = x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 68x - 60$
14. $\dfrac{g(x)}{r(x)} = x + 3$
15. $\dfrac{s(x)}{r(x)} = x - 5$
16. $g(x) - s(x) = 8(x + 2)$
17. $f(x) \cdot r(x) = x^2 + 5x + 6$
18. $\dfrac{f(x)}{r(x)} = \dfrac{x+3}{x+2}$
19. $\dfrac{g(x)}{s(x)} = \dfrac{x+3}{x-5}$
20. $\dfrac{g(x)}{f(x)} + \dfrac{s(x)}{r(x)} = 2x - 3$
21. $f(x) + g(x) = \dfrac{x^2+2}{x(x+2)}$
22. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2-x}{x+2}$
23. $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x}$
24. $f(x) - h(x) = \dfrac{5-5x}{(x+2)(x-3)}$
25. $g(x) \cdot h(x) = \dfrac{x-1}{x^2-3x}$
26. $\dfrac{f(x)}{g(x)} + h(x) = \dfrac{x^3-3x^2+4x-2}{(x+2)(x-3)}$
27. $\dfrac{h(x)}{f(x)} - g(x) = \dfrac{x^2+x+3}{x(x-3)}$
28. $\dfrac{h(2) - f(1)}{g(3)} = -3$
29. $f(x + 1) \cdot \dfrac{1}{h(x+1)} = \dfrac{x-2}{x+3}$
30. $h(x) - g(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x(x-3)}$

31. $\frac{h(x)}{g(x)} - \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^4 - 2x^3 + x + 6}{x(x-1)(x-3)}$

32. $f(x) \cdot h(x) - g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 6}{x(x+2)(x-3)}$

33. $\frac{f(x) + h(x)}{g(x)} = \frac{x(x-1)(2x-1)}{(x+2)(x-3)}$

34. $\frac{1}{g(x) + h(x)} = \frac{x(x-3)}{x^2 - 3}$

35. $\frac{1}{1 - h(x)} = \frac{3 - x}{2}$

EJERCICIO 10

1. $(f \circ g)(x) = 12x^2 - 46x + 40$, $(g \circ f)(x) = 6x^2 - 10x - 7$,
   $(f \circ f)(x) = 27x^4 - 90x^3 + 24x^2 + 85x + 20$,
   $(g \circ g)(x) = 4x - 9$
2. $(f \circ g)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = x$, $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$, $(g \circ g)(x) = x^4$
3. $(f \circ g)(x) = 4$, $(g \circ f)(x) = 2$, $(f \circ f)(x) = 4$, $(g \circ g)(x) = 2$
4. $(f \circ g)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = x$, $(f \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 10}$
   $(g \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 10}$
5. $(f \circ g)(x) = x + 2\sqrt{x-1}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$
   $(f \circ f)(x) = (x^2 + 2x + 2)^2$, $(g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x-1} - 1}$
6. $(f \circ g)(x) = \frac{1-x}{1+3x}$, $(g \circ f)(x) = \frac{x+3}{x-1}$
   $(f \circ f)(x) = -\frac{1}{2x+1}$, $(g \circ g)(x) = x$
7. $(f \circ g)(x) = \log(x - 4)$, $(g \circ f)(x) = \log(x - 2) - 2$
   $(f \circ f)(x) = \log[\log(x - 2) - 2]$, $(g \circ g)(x) = x - 4$
8. $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{-x^2 - \sqrt{x^4 - 1}}$
   $(f \circ f)(x) = \sqrt{-\frac{1}{x^2}}$ no está definida
   $(g \circ g)(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$
9. $(f \circ g)(x) = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)\}$
   $(g \circ f)(x) =$ No está definida, $(f \circ f)(x) = \{(2, 8)\}$
   $(g \circ g)(x) = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$
10. $(f \circ g)(x) = \{(-2, 1), (-1, 4), (0, 9), (1, 16)\}$
    $(g \circ f)(x) = (1, 4)$, $(f \circ f)(x) = \{(1, 1), (2, 16)\}$
    $(g \circ g)(x) = \{(-2, 4)\}$
11. $(f \circ g)(x) = \{(3, 1), (-2, -3), (1, -1)\}$
    $(g \circ f)(x) = \{(0, -1), (1, 0)\}$, $(f \circ f)(x) = \{(0, 3), (-1, -1)\}$
    $(g \circ g)(x) = \{(-2, -2)\}$
12. $f(x) = \frac{1}{x}$
13. $f(x) = \sqrt{x}$
14. $f(x) = mx + b$
15. $f(x) = x^2$
16. $f(x) = \sqrt{x - 2}$
17. $f \circ g \circ h = 81x^2 - 54x + 9$
18. $f \circ g \circ h = 1 - 12x^2 + 48x^4 + 64x^6$
19. $f \circ g \circ h = \sqrt{2x - 9}$
20. $f \circ g \circ h = \text{sen}^2(x - 2)$
21. $f \circ g \circ h = \sec^2 x$
22. $f \circ g \circ h = \text{sen}\, x$

EJERCICIO 11

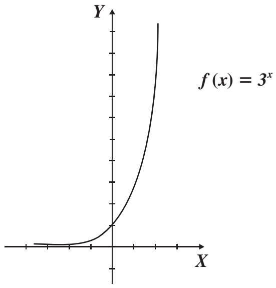
1. Ninguna	6. Ninguna	11. Par
2. Par	7. Par	12. Par
3. Impar	8. Par	13. Impar
4. Ninguna	9. Ninguna	14. Par
5. Ninguna	10. Impar	15. Par

EJERCICIO 12

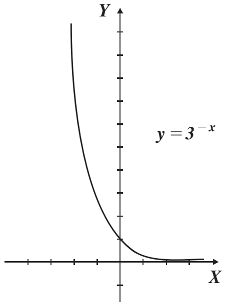
1. $f^{-1}(x) = x$
2. $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$
3. $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 9}$
4. No tiene inversa
5. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
6. $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$
7. $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$
8. $f^{-1}(x) = 3 - x^2$
9. No tiene inversa
10. $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2}$
11. $f^{-1}(x) = x^3 - 9$
12. $f^{-1}(x) = \frac{1 - 3x}{2x}$
13. $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
14. $f^{-1}(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$
15. $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

Ejercicio 13

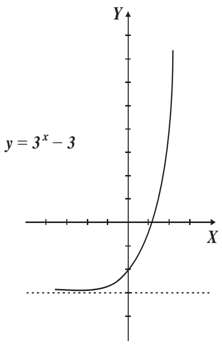
1.



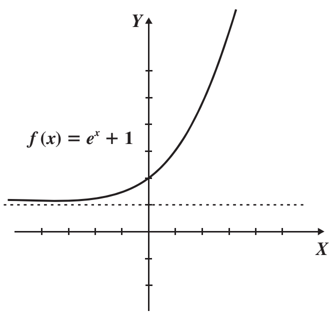
2.



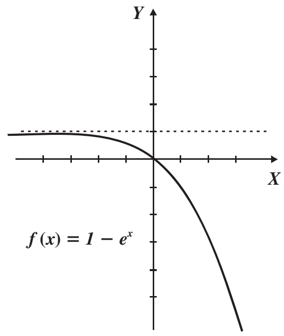
3.



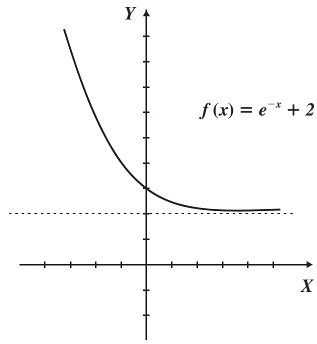
4.



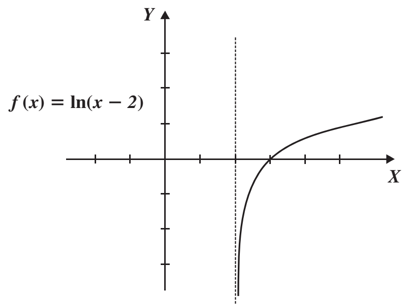
5.



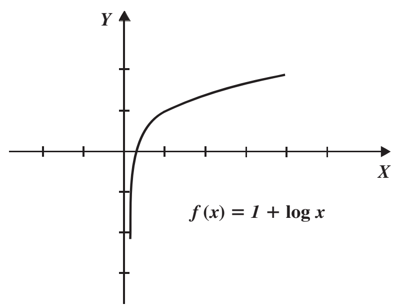
6.



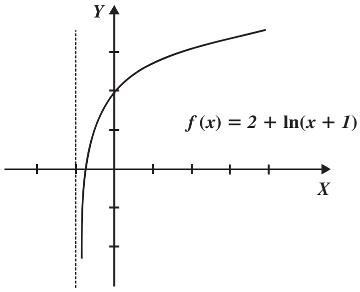
7.



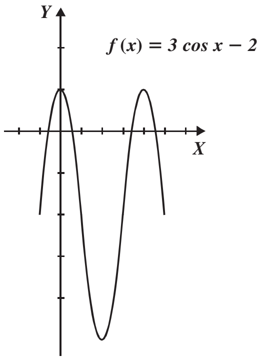
8.



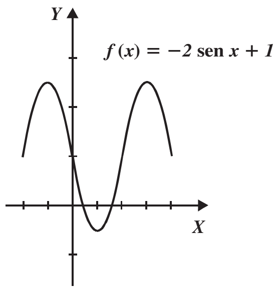
9.



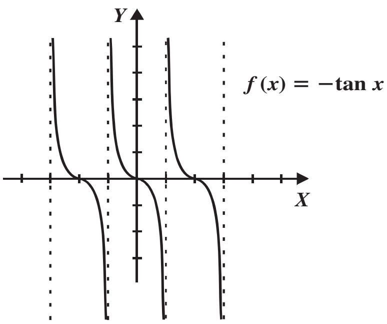
10.



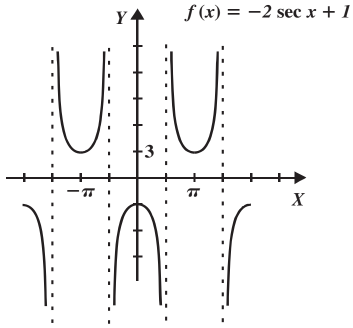
11.



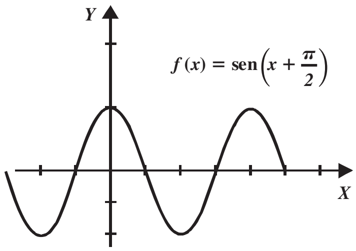
12.



13.



14.



EJERCICIO 14

1. $V(h) = 40h$
2. $V(h) = \dfrac{4}{75}\pi h^3$
3. $P(A) = \dfrac{12\sqrt{5A}}{5}$
4. $A(d) = \dfrac{\pi d^2}{4}$
5. $V(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi x^3$
6. $A(x) = \dfrac{3}{4}(x + 2)^2$
7. $V(x) = \dfrac{\pi r^2}{6}(8r + 15)$
8. $A(x) = \dfrac{\pi x^2}{3}$
9. $A(x) = 3x\sqrt{16 - x^2}$
10. $A(x) = (x - 4)\left(\dfrac{540}{x} - 3\right)$
11. $d(t) = \dfrac{9}{2}\sqrt{16t^2 + 1}$
12. $d(t) = \dfrac{1}{2}\sqrt{t^2 - 16}$

CAPÍTULO 2

EJERCICIO 15

1. -1
2. $0.16666 = \frac{1}{6}$
3. -1
4. 0
5. 1
6. 4
7. No existe
8. No existe
9. 2
10. 3

EJERCICIO 16

11. $\delta = 0.01$
12. $\delta = 0.08$
13. $\delta = 0.025$
14. $\delta = 0.4$
15. $\varepsilon = 0.18$
16. $\varepsilon = 0.0098$
17. $\varepsilon = 0.25$
18. $\varepsilon = 0.002$

EJERCICIO 17

1. 3
2. 24
3. 18
4. 0
5. 7
6. 64
7. -3
8. $-\frac{4}{27}$
9. 15
10. $2\sqrt{3}$
11. 32
12. 1
13. 1
14. $-\frac{5}{8}$
15. 0
16. No existe
17. 1
18. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
19. 1
20. h
21. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

EJERCICIO 18

1. $\frac{3}{5}$
2. No existe
3. 0
4. $\frac{a}{c}$
5. $-\frac{2}{3}$
6. $\frac{1}{2}$
7. 4
8. $\frac{1}{2h}$
9. $-\frac{1}{2}$
10. $2a$
11. 9
12. 0
13. $-\frac{1}{2}$
14. $\frac{5}{4}$
15. $\frac{1}{4}$
16. 2
17. 4
18. $-\frac{3}{7}$
19. 15
20. $\frac{9}{19}$
21. $\frac{7}{9}$
22. -6
23. $\frac{1}{3}$
24. -3
25. 3
26. $\frac{1}{12}$
27. 48
28. $\frac{1}{4}$
29. 2
30. No existe
31. $\frac{1}{2}$
32. $2\sqrt{5}$
33. $-\frac{1}{6}$
34. $\frac{24}{5}$
35. $\frac{b}{a}$
36. $\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{p^{n-1}}}$
37. $-\frac{1}{2}$
38. $\frac{5}{12}$
39. 2
40. 0
41. $-\frac{3}{20}$
42. $\frac{1}{4}$
43. $\frac{1}{4}$
44. $\frac{1}{6a\sqrt[3]{a^2}}$
45. $\frac{1}{3}$
46. $\frac{1}{8}$
47. $\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}$
48. $\frac{1}{54}$
49. $\frac{1}{4}$
50. $\frac{2}{25}$

EJERCICIO 19

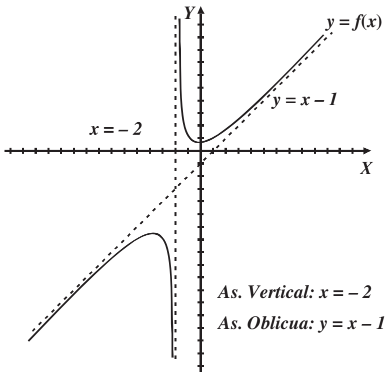
1. $\frac{7}{4}$
2. 2
3. 0
4. No existe
5. 3
6. $\frac{1}{2}$
7. $-\frac{1}{3}$
8. 0
9. 1
10. 0
11. $-\frac{11}{6}$
12. -1
13. $\frac{9}{2}$
14. 1
15. 1
16. $\frac{a_m}{b_n}$ si $m = n$
    0 si $m < n$
    No existe si $m > n$
17. $\frac{a}{c}$
18. $\sqrt[n]{a}$

EJERCICIO 20

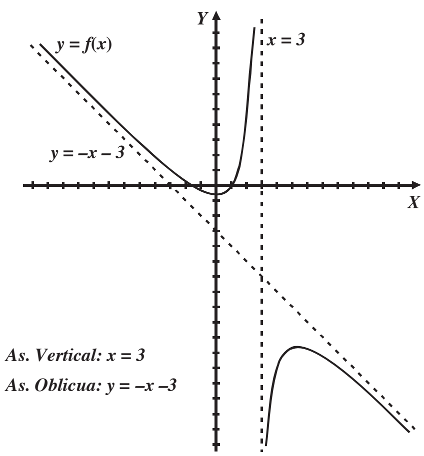
1. $y = \dfrac{1}{2}$
2. $y = 0$
3. No tiene asíntota horizontal
4. $y = 1, y = -1$
5. $y = 2$
6. $y = \dfrac{a}{c}$
7. $y = 0$
8. $y = -2$
9. No tiene asíntota horizontal
10. $y = \dfrac{a}{b}$

EJERCICIO 21

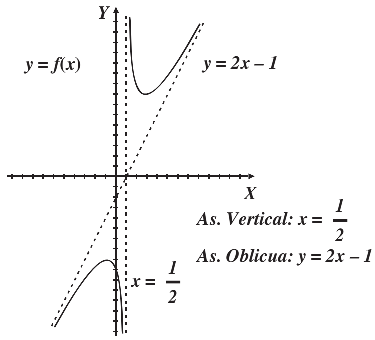
1.



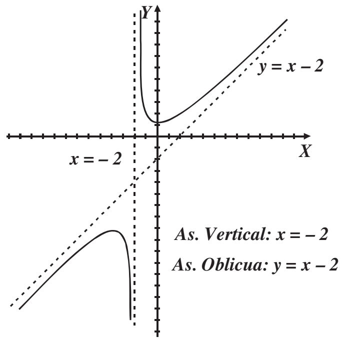
2.



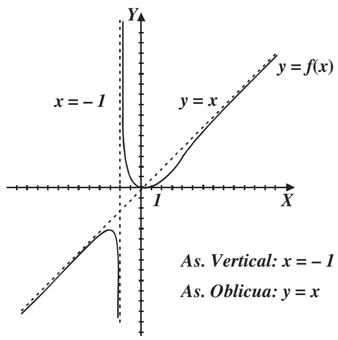
3.



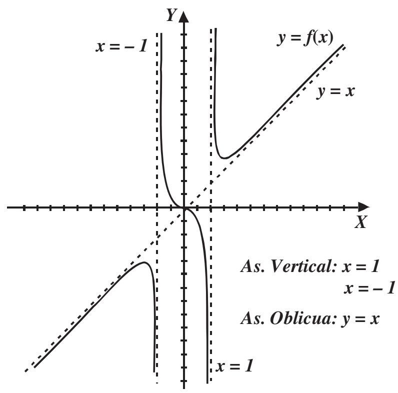
4.



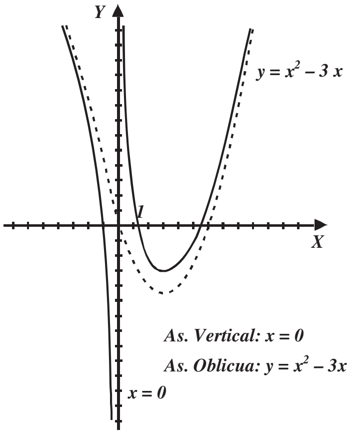
5.



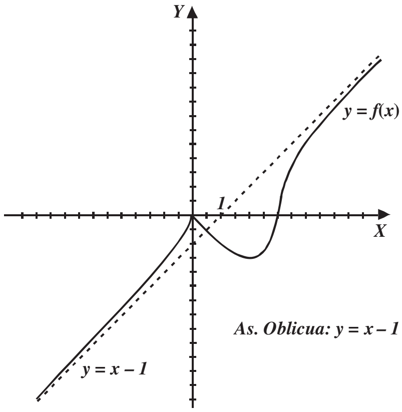
6.



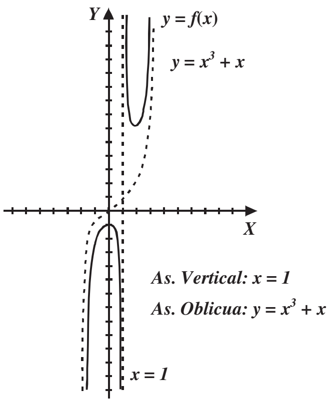
7.



8.



9.



EJERCICIO 22

1. *a*) 11, *b*) 9, *c*) No existe
2. *a*) -1, *b*) -1, *c*) -1, *d*) -6, *e*) -4, *f*) No existe
3. *a*) 0, *b*) 2, *c*) No existe, *d*) $-\frac{2}{3}$, *e*) $-\frac{2}{3}$, *f*) $-\frac{2}{3}$
4. *a*) 1, *b*) 4, *c*) 4, *d*) 4, *e*) 16
5. *a*) 4, *b*) 4, *c*) 4, *d*) 8, *e*) 3, *f*) No existe
6. -7
7. 1
8. 3
9. 2
10. No existe el límite

EJERCICIO 23

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
3. -2
4. -1
5. $-\frac{1}{2}$
6. 2
7. $-4\sqrt{3}$
8. 0
9. 1
10. No existe

EJERCICIO 24

1. -2
2. $\frac{3}{4}$
3. $-\frac{1}{2}$
4. 0
5. $-\frac{1}{2}$
6. 0
7. 0
8. $\sqrt{2}$
9. -1
10. $-\sec^3(3)$
11. -2
12. $\frac{1}{2^m}$
13. 1
14. 0
15. $\frac{1}{2}$
16. 0
17. 9
18. 0
19. $\frac{n^2 - m^2}{4}$
20. 0

CAPÍTULO 3

EJERCICIO 25

1. Es continua en $x = 0$
2. No es continua en $x = 2$
3. No es continua en $x = -\frac{3}{2}$
4. Es continua en $x = 3$
5. Continuidad removible en $x = 2$
6. No es continua en $x = 2\pi$
7. Es continua en $x = 2$
8. No es continua en $x = 1$
9. No es continua en $x = 0$

10. No es continua en $x = -2$; es continua en $x = 2$
11. Es continua en $x = 1$; no es continua en $x = 2$
12. Es continua en $x = \pi$ y $x = \frac{3}{2}\pi$
13. No es continua en $x = -3$; es continua en $x = 3$
14. Continuidad removible en $x = 3$
15. Continuidad removible en $x = 1$
16. Continuidad removible en $x = -2$
17. Continuidad removible en $x = 8$
18. No es continua en $x = \frac{1}{2}$
19. $k = 1$
20. $k = 0$ o $k = 2$
21. $k = 1$ o $k = -\frac{2}{9}$
22. $a = -\frac{9}{4}$, $b = -7$
23. $a = -\frac{17}{2}$, $b = -2$
24. $a = 4$, $b = 2$

EJERCICIO 26

1. sí
2. no
3. sí
4. no
5. sí
6. sí
7. sí
8. no
9. no
10. sí

EJERCICIO 27

1. 2
2. 0
3. 4
4. $\pm\sqrt{2}, \frac{1}{2}$
5. 5
6. -5
7. 5
8. $\frac{2}{5}$
9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. 1

CAPÍTULO 4

EJERCICIO 28

1. $y' = 3$
2. $y' = -b$
3. $y' = 2x$
4. $f'(x) = 6x - 5$
5. $y' = 2ax + b$
6. $y' = 3x^2$
7. $y' = 3x^2 - 2x$
8. $y' = 4$
9. $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$
10. $y' = 3x^2$
11. $f'(x) = -\frac{6}{x^3}$
12. $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$
13. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$
14. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$
15. $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$
16. $y' = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$
17. $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
18. $y' = \frac{-2}{3(x-1)\sqrt[3]{x-1}}$
19. $y' = \frac{2}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+3)^{\frac{3}{2}}}$
20. $y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

EJERCICIO 29

1. $y' = 0$
2. $y' = 0$
3. $f'(x) = 0$
4. $s'(t) = 0$
5. $y' = 6$
6. $y' = \frac{3}{4}$
7. $f'(x) = a$
8. $s'(t) = b^2$
9. $f'(x) = 5\sqrt{2}$
10. $y' = a\sqrt{b}$
11. $f'(x) = 5x^4$
12. $f'(x) = 12x^2$
13. $s'(t) = \frac{4}{5}t^3$
14. $y' = \frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}}$
15. $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$
16. $y' = 9x^{\frac{1}{2}}$
17. $f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$
18. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$
19. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
20. $s'(t) = \frac{1}{4\sqrt[4]{t^3}}$
21. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$
22. $f'(x) = \frac{5x^4}{7}$
23. $f'(x) = \frac{4x^3}{9}$
24. $s'(t) = \frac{3t^2}{a}$
25. $f'(x) = -\frac{20}{x^5}$
26. $f'(x) = -\frac{12}{x^7}$
27. $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}$
28. $s'(t) = \frac{1}{15\sqrt[3]{t^2}}$
29. $f'(x) = -\frac{2}{x\sqrt{x}}$
30. $s'(t) = -\frac{5}{4t\sqrt[4]{t}}$

31. $f'(x) = -\dfrac{4}{3x\sqrt[3]{x}}$

32. $f'(x) = 21x^2 - 6x + 3$

33. $f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 16x - 1$

34. $f'(x) = 10x + 4$

35. $f'(x) = 12ax^3 - 12ax^2 - 10bx + 7c$

36. $f'(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{6x}{5} - \dfrac{4}{9}$

37. $s'(t) = \dfrac{5t^4}{6} - \dfrac{4t^3}{5} + \dfrac{3t^2}{4} - \dfrac{2t}{7} + \dfrac{1}{9}$

38. $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \dfrac{1}{a}$

39. $s'(t) = -\dfrac{8}{t^3} + \dfrac{5}{t^2}$

40. $f'(x) = -\dfrac{20}{x^5} + \dfrac{18}{x^4} + \dfrac{14}{x^3} + \dfrac{3}{x^2}$

41. $s(t) = \dfrac{3t^2}{5} + \dfrac{4}{t^3} - \dfrac{6}{t^2}$

42. $f'(x) = \dfrac{1}{15\sqrt[5]{x^2}} + \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

43. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 6 - \dfrac{2}{x^2}$

44. $f'(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{5}{4\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x^2\sqrt{x}}$

45. $f'(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} + 6\sqrt{x}$

46. $f'(x) = anx^{n-1} + b(n-1)x^{n-2}$

47. $f'(x) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{7}$

48. $f'(x) = \dfrac{a}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} + \dfrac{b}{3\sqrt[3]{x^2}}$

49. $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}} + \dfrac{5\sqrt[4]{x}}{12}$

50. $f'(x) = -\dfrac{5}{2x^2\sqrt[4]{x}} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} + 3$

51. $f'(x) = 14x + 15x^2$

52. $f'(x) = -\dfrac{6}{x^3} - \dfrac{5}{x^2} - 2$

53. $f'(x) = 5\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{10}{3\sqrt[3]{x}} - \dfrac{8}{3x\sqrt[3]{x}}$

54. $y' = \dfrac{3}{x^2}$

55. $y' = 15(3x - 4)^4$

56. $y' = -12(2 - 4x)^2$

57. $y' = (72x^5 - 32x^3)(3x^6 - 2x^4)^3$

58. $y' = 12\sqrt{x}\,(2x - 1)^2(6x - 1)$

59. $y' = \dfrac{-3x}{\sqrt{5 - 3x^2}}$

60. $y' = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 2)^2}}$

61. $y' = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

62. $y' = \dfrac{4x + 6}{3\sqrt{2x^2 + 6x}}$

63. $y' = \left(1 + \dfrac{9}{\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{x}{3} + 6\sqrt{x}\right)^2$

64. $f'(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[4]{(x^4 - 2)^3}}$

65. $f'(x) = (6x + 15)(x^2 + 5x - 3)^2$

66. $y' = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{2x - 3}}$

67. $y' = \dfrac{1}{(4x + 3)^{\frac{3}{4}}}$

68. $f'(x) = \left(\dfrac{1}{3}x + 2\right)^2$

69. $y' = \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$

70. $f'(z) = \dfrac{z}{\sqrt{z^2 - 4}}$

71. $y' = \dfrac{2x^5 + 1}{\sqrt[3]{(x^6 + 3x)^2}}$

72. $y' = 108x^2 + 55x - 4$

73. $y' = 40x - 12 - \dfrac{9}{x^2}$

74. $y' = 12x^3 + 3x^2$

75. $f'(x) = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{2x + 1}}$

76. $y' = \frac{1}{3}(2x+1)^2(8x+1)$

77. $y' = \frac{5x^2 - 4x}{2\sqrt{x-1}}$

78. $f'(x) = 12x(3x^2 - 5)^3(2x^2 + 1)^2(7x^2 - 3)$

79. $f'(\theta) = (6\theta^4 - 12\theta)(\theta^2 + 1)^2(2\theta^3 + \theta - 2)$

80. $s' = \frac{8 - 9t}{2\sqrt{4 - 3t}}$

81. $s'(t) = (2t + 3)\left(\frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}\right) = 4 - \frac{9}{t^2}$

82. $f'(x) = \frac{6}{(1-2x)^2}$

83. $f'(t) = \frac{-bt}{a\sqrt{a^2 - t^2}}$

84. $f'(r) = \frac{r^3 - 5r}{(r^2 - 4)^{\frac{3}{2}}}$

85. $f'(t) = \frac{63}{(5t+8)^2}$

86. $f'(z) = \frac{21}{(5-6z)^2}$

87. $f'(x) = -\frac{2ab}{(ax-b)^2}$

88. $f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{3x}}$

89. $f'(t) = \frac{-2}{(1+2t)\sqrt{1-4t^2}}$

90. $f'(w) = \frac{10(w-3)}{(w+2)^3}$

91. $f'(\theta) = \frac{24\theta^3 - 54\theta^2 + 24}{(3-2\theta)^2}$

92. $f'(s) = \frac{-6s^2 + 4s - 12}{(s^2 - 6s)^2}$

93. $f'(x) = \frac{10b^2x + 5x^3}{2(b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$

94. $f'(t)\ \frac{(693 - 27t)(9t-6)^2}{(27-3t)^3}$

95. $f'(x) = \frac{2ab}{(a-3x)^2}$

96. $f'(x) = \frac{8 - 4x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$

97. $y' = \frac{-4x^3}{(x^4 - a^4)^{\frac{3}{2}}}$

98. $y' = \frac{7x^4 + 27x^2}{3(x^2+3)^{\frac{4}{3}}}$

99. $y' = \frac{8x^2 + 24x + 9}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$

100. $y' = \frac{x+2}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$

101. $y' = \frac{3x - 3}{2\sqrt{x-3}}$

102. $y' = \frac{-2x^2}{(x^6 - 1)^{\frac{2}{3}}(x^3 - 1)^{\frac{2}{3}}}$

103. $y' = \frac{nx^{n-1}}{(1 - x^n)\sqrt{x^{2n} - 1}}$

104. $y' = \frac{-n\sqrt[m]{x^{n-m}}}{m\left(\sqrt[m]{x^n} - 1\right)^2}$

105. $y' = \frac{-20x^2 + 19x + 8}{2(4-5x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2x+1}}$

106. $y' = \frac{8x^6 - 8x^3 - 2}{\sqrt[3]{(4x^6 - 1)^2(2x^3 - 1)^2}}$

EJERCICIO 30

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2u}{x^2}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{u^2 - 1}(1+u)}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x(6u^2 - 3)}{\sqrt{2u^3 - 3u}}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{u^3} - \frac{9}{u^4}$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{(8 + 12x - 3x^2)(u^2+1)}{(u^2-1)^2}$

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{5u^3 + 3u}{\sqrt{u^3 + u}}$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{\sqrt{u}(x^3+1)^2}$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{(u-1)^2(v-2)^2\sqrt{x^2 - 1}}$

9. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{v}{2\sqrt{x}\sqrt{u-1}(v^2-1)^2}$

10. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x(x^2+3)}{(v+1)\sqrt{v^2-1}\sqrt{u^3}}$

11. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2u}{\sqrt{v}(x-1)^2}$

EJERCICIO 31

1. $y' = 8\cos 8x$
2. $f'(x) = -6x \operatorname{sen} 3x^2$
3. $f'(x) = 3x^2 \sec^2 x^3$
4. $s'(t) = 6\sec 6t \tan 6t$
5. $f'(x) = -12x^2 \csc^2 4x^3$
6. $f'(x) = -9\csc 9x \cot 9x$
7. $f'(x) = -a \operatorname{sen} ax$
8. $s'(t) = 2bt \sec^2 bt^2$
9. $f'(x) = 12x \sec x^2 \tan x^2$
10. $f'(x) = -\dfrac{1}{8}\csc\dfrac{x}{4}\cot\dfrac{x}{4}$
11. $f'(x) = -3a \operatorname{sen} 3x$
12. $f'(x) = -3\csc^2(3x-5)$
13. $f'(x) = \cos\dfrac{x}{2}$
14. $f'(x) = -5\operatorname{sen}\left(5x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
15. $s'(t) = a\sec^2(at+\pi)$
16. $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$
17. $s'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}$
18. $f'(x) = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\csc^2\sqrt[3]{x}$
19. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$
20. $s'(t) = \dfrac{3}{t^4}\operatorname{sen}\dfrac{1}{t^3}$
21. $f'(x) = -\dfrac{\sec\dfrac{1}{\sqrt{x}}\tan\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$
22. $f'(x) = 3\sec^2 3x - 3 = 3\tan^2 3x$
23. $f'(x) = a - a\csc^2 ax = -a\cot^2 ax$
24. $f'(x) = 2(x-1)\cos(x-1)^2$
25. $f'(x) = -18t(3t^2+2)^2 \operatorname{sen}(3t^2+2)^3$
26. $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}\csc^2\sqrt{x-1}$
27. $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2}\sec^2\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
28. $f'(x) = -\dfrac{2ab}{(ax-b)^2}\sec\left(\dfrac{ax+b}{ax-b}\right)\tan\left(\dfrac{ax+b}{ax-b}\right)$
29. $f'(x) = 10\operatorname{sen} 5x\cos 5x = 5\operatorname{sen} 10x$
30. $f'(x) = -3b\cos^2 bx \operatorname{sen} bx$
31. $f'(x) = 24x\tan^3 3x^2 \sec^2 3x^2$
32. $f'(x) = \dfrac{2\cos 4x}{\sqrt{\operatorname{sen} 4x}} = 2\sqrt{\operatorname{sen} 4x}\,\cot 4x$
33. $f'(x) = 5x\tan 5x^2\sqrt{\sec 5x^2}$
34. $f'(x) = \dfrac{2x\sec^2 x^2}{\sqrt[3]{9\tan^2 x^2}}$
35. $f'(x) = x\cos x + \operatorname{sen} x$
36. $f'(x) = 2x\cos x^2 - 2x^3 \operatorname{sen} x^2$
37. $f'(x) = \dfrac{3x\cos 3x - \operatorname{sen} 3x}{x^2}$
38. $f'(x) = -\dfrac{10t^2\operatorname{sen} 5t^2 + 2\cos 5t^2}{t^3}$
39. $y' = 2ax\cos(ax^2)$
40. $y' = -3a\operatorname{sen}(3x)$
41. $y' = \dfrac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
42. $y' = x\sec 3x^2\tan 3x^2$
43. $y' = -\dfrac{1}{3}\csc\dfrac{2x}{3}\cot\dfrac{2x}{3}$
44. $y' = 2x + 3 + \dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
45. $y' = -6x\csc^2(1-x^2)$
46. $y' = \dfrac{-4}{3(x-1)^2}\cdot\cos\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
47. $y' = 2b\operatorname{sen} 4bx$
48. $y' = 24(2x-1)^2\tan^3(2x-1)^3\sec^2(2x-1)^3$
49. $y' = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos^3 2x}}$
50. $y' = \dfrac{2x\sec^2 x^2}{\sqrt[3]{9\tan^2 x^2}}$
51. $y' = \cos 4x(\cos^2 4x - 6x\operatorname{sen} 8x)$
52. $y' = x\csc ax(2 - ax\cot ax)$
53. $y' = (1 - x\cot 2x)\sqrt{\csc 2x}$

54. $y' = \dfrac{-m \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx - n \cos nx \cos mx}{\operatorname{sen}^2 nx}$

55. $y' = \dfrac{-\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}$

56. $y' = -x \operatorname{sen} x$

57. $y' = \dfrac{\sec^2 x\,(\tan x - 1)}{\sqrt{(\tan^2 x - 1)^3}}$

58. $y' = (2x^2 - 6)\cos 2x + 10x \operatorname{sen} 2x$

59. $y' = -2\cos(2x - 1)$

60. $y' = x\sec(\pi - x)\cdot[2 - x\tan(\pi - x)]$

61. $y' = \dfrac{81x^2 \operatorname{sen}^2 x[3x^2\cos x + x\cos x + \operatorname{sen} x]}{(3x+1)^4}$

62. $y' = \dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} \operatorname{sen}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

63. $y' = \left(\dfrac{\sec x}{x}\right)^2 (x \operatorname{sen} x - \cos x)$

64. $y' = -x \operatorname{sen} x + \cos x$

65. $y' = 2\cos 2x$

66. $y' = 2\sec^2 x \tan x$

67. $y' = -\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$

68. $y' = -6\operatorname{sen}(6x + 2)$

69. $y' = -\dfrac{x \operatorname{sen} x + 2\cos x}{x^3}$

70. $y' = (\operatorname{sen} x + \cos x)(\tan^2 x - \tan x + 2)$

71. $y' = -\cos^3 x$

72. $y' = x^2 \operatorname{sen} x$

73. $y' = \operatorname{sen}^4 2x$

EJERCICIO 32

1. $y' = \dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

2. $f'(x) = \dfrac{-8x}{\sqrt{1-16x^4}}$

3. $f'(x) = \dfrac{3}{1+9x^2}$

4. $y' = -\dfrac{3x^2}{1+x^6}$

5. $f'(x) = \dfrac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

6. $f'(x) = -\dfrac{2}{x\sqrt{9x^4-1}}$

7. $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}$

8. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$

9. $f'(x) = \dfrac{a}{a^2+x^2}$

10. $f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$

11. $y' = -\dfrac{2x}{\sqrt{-8+6x^2-x^4}}$

12. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $y' = \dfrac{x^2}{x^2+1} + 2x \operatorname{arc\,tan} x$

14. $y' = \operatorname{arc\,sen} x$

15. $y' = \dfrac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}$

16. $y' = \operatorname{arc\,csc}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

17. $y' = x \operatorname{arc\,tan} x$

18. $\varphi' = \dfrac{\theta}{(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-2}}$

19. $y' = \sqrt{1-4x^2}$

20. $y' = x^2 \operatorname{arc\,sen} x$

21. $f'(r) = \sqrt{\dfrac{b-r}{b+r}}$

22. $y' = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

23. $y' = \dfrac{3+6x^2}{(1+4x^2)(1+x^2)}$

24. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

25. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \operatorname{arc\,cos}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

26. $y' = \dfrac{4a-8x}{\sqrt{1-(4ax-4x^2)^2}}$

27. $f'(r) = \dfrac{1}{\sqrt{-r^2 + 4r - 3}}$

28. $y' = \dfrac{1}{4x^2 + 4x + 5}$

29. $y' = \dfrac{x+2}{\sqrt{4x - x^2}}$

30. $y' = \dfrac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}}$

31. $y' = \sqrt{2x - x^2}$

32. $s'(t) = \dfrac{2 - 3t}{\sqrt{9 - t^2}}$

33. $y' = \sqrt{25 - 9x^2}$

34. $w' = \dfrac{\theta + 5}{(\theta + 4)\sqrt{\theta + 2}}$

35. $y' = \dfrac{1}{5 + 4\cos x}$

36. $y' = \dfrac{\cos x}{5 - 3\cos x}$

37. $y' = -\dfrac{1}{3}$

38. $y' = \text{arc cot}(\tan x) - x$

39. $y' = \dfrac{1}{(4x^2 - 1)}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{4x \text{ arc sec } 2x}{\sqrt{4x^2 - 1}}\right)$

40. $y' = \dfrac{\sqrt{7 - 8\cos x + \cos^2 x}}{14 - 2\cos x}$

41. $y' = \dfrac{64}{(3x+2)\sqrt{5x^2 + 28x - 12}}$

42. $s' = \dfrac{t^2}{\sqrt{2t - t^2}} + 2t \text{ arc cos}(1 - t) + 2$

43. $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - (a + x)^2}}$

EJERCICIO 33

1. $y' = \dfrac{3}{x}$

2. $f'(x) = \dfrac{2}{x}$

3. $f'(x) = \dfrac{6x - 5}{3x^2 - 5x + 2}$

4. $f'(x) = \dfrac{1}{2x}$

5. $f'(x) = \dfrac{6 \log e}{x}$

6. $f'(x) = \dfrac{3 \log e}{x}$

7. $f'(x) = \dfrac{\log_3 e}{x}$

8. $f'(x) = \dfrac{\log_4 e}{3x}$

9. $f'(x) = \dfrac{4 \ln^3 x}{x}$

10. $f'(x) = \dfrac{3 \ln^2 5x}{x}$

11. $y' = x(1 + \ln x^2)$

12. $y' = 2(1 + \ln x)$

13. $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

14. $f'(x) = \dfrac{2 - \ln x^2}{x^2}$

15. $y' = -\dfrac{a}{2(b - ax)} = \dfrac{a}{2(ax - b)}$

16. $f'(x) = \dfrac{9x^2 - 2}{x(3x^2 - 1)}$

17. $f'(x) = \dfrac{2ax^2 - b}{x(ax^2 - b)}$

18. $y' = \dfrac{13}{(3x - 5)(2x + 1)}$

19. $f'(x) = \dfrac{bc}{c^2x^2 - b^2}$

20. $y' = \cot x$

21. $y' = -5 \tan 5x$

22. $y' = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$

23. $y' = \dfrac{3}{2(3x + 4)}$

24. $y' = \dfrac{12}{4x^2 - 9}$

25. $y' = \dfrac{x^2}{x^3 + 8}$

26. $y' = \dfrac{\ln x}{2x}$

27. $y' = \dfrac{27x^2+12x+6}{(3x+2)(3x^2+2)}$

28. $y' = \dfrac{2\log_3 e}{4x^2-1}$

29. $y' = \dfrac{\left(30\,bx^2\sqrt{x}-3\right)\log e}{10\,bx^3\sqrt{x}-6x}$

30. $y' = \tan x$

31. $y' = 2\cot x$

32. $y' = 1+\ln x$

33. $y' = -2\tan 2x$

34. $y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

35. $y' = \sec x$

36. $y' = -\dfrac{1+\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$

37. $y' = \dfrac{x+\tan x}{x\tan x}$

38. $y' = 2x^2(1+\ln x^3)$

39. $y' = \dfrac{3\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,\tan x} = \dfrac{3\sec\sqrt{x}\,\csc\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

40. $y' = \dfrac{\log e}{2x}$

41. $y' = 2^{x^2+5x}\cdot\ln 2\cdot(2x+5)$

42. $f'(x) = \dfrac{b^{\sqrt{x}}\ln b}{2\sqrt{x}}$

43. $y' = \dfrac{3^{\ln x}\ln 3}{x}$

44. $y' = (x\cos x+\operatorname{sen} x)\cdot 5^{x\operatorname{sen} x}\cdot\ln 5$

45. $y' = 2^{\ln x}(1+\ln 2)$

46. $y' = 5^x(\ln 5^x+1)$

47. $y' = 2xe^{x^2} = 2xy$

48. $y' = (6x-2)e^{3x^2-2x+1} = (6x-2)y$

49. $y' = \dfrac{3xe^{\sqrt{3x^2-1}}}{\sqrt{3x^2-1}} = \dfrac{3xy}{\sqrt{3x^2-1}}$

50. $y' = (x\sec^2 x+\tan x)y$

51. $y' = e^{\frac{2x}{b}}+e^{-\frac{2x}{b}}$

52. $y' = \dfrac{8}{(e^{2x}+e^{-2x})^2}$

53. $f'(x) = 4e^{4x}$

54. $f'(x) = 10xe^{5x^2}$

55. $f'(x) = 3e^{3x-1}$

56. $f'(x) = \dfrac{1}{5}e^{\frac{x}{5}}$

57. $f'(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{e^t}$

58. $f'(x) = \dfrac{1}{4}\sqrt[4]{e^x}$

59. $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}$

60. $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

61. $f'(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta\cdot e^{\operatorname{sen}^2\theta}$

62. $f(x) = -2\operatorname{sen} 2x\cdot e^{\cos 2x}$

63. $y' = (\operatorname{sen} x+\cos x)e^{x+e^x\operatorname{sen} x}$

64. $f'(x) = (3\ln 5)5^{3x}$

65. $f'(x) = (2\ln 7)7^{2x}$

66. $f'(x) = (2x\ln 5)5^{x^2}$

67. $y' = 2x^{2x}(1+\ln x)$

68. $y' = x^{\cos x-1}(\cos x - x\ln x^{\operatorname{sen} x})$

69. $y' = \dfrac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-\ln x)$

70. $y' = \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2} = \dfrac{y}{1+x^2}$

71. $y' = \dfrac{1+2x}{2x}$

72. $y' = 3e^{\ln x^2} = 3x^2$

73. $y' = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$

74. $y' = \dfrac{e^x(x\ln x+\ln x-1)}{2\ln^2 x}$

75. $y' = \dfrac{-1}{x(\ln x-1)\sqrt{\ln^2 x-1}}$

76. $y' = \dfrac{e^{\operatorname{sen} x}\cos x}{(1-e^{\operatorname{sen} x})\sqrt{e^{2\operatorname{sen} x}-1}}$

77. $y' = \dfrac{2a\cot ax}{e^y}$

78. $y' = \dfrac{e^{\ln\sqrt{e^x\operatorname{sen} x}}(1+\cot x)}{2} = \dfrac{y(1+\cot x)}{2}$

79. $y' = xe^{\operatorname{sen} x}(x\cos x + 2)$

80. $y' = \cot x$

81. $y' = \dfrac{3x^2 - 8}{x(x^2 - 4)}$

82. $y' = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+9}}$

83. $y' = \sec^3 2x$

84. $y' = \operatorname{arc}\tan x$

85. $y' = \sqrt{x^2 - 4}$

86. $y' = \operatorname{arc}\sec x$

87. $y' = \dfrac{1}{4x^2 - 9}$

88. $y' = \operatorname{arc}\cot x$

89. $y' = \operatorname{arc}\csc \dfrac{x}{2}$

EJERCICIO 34

1. $y' = -\dfrac{x}{y}$

2. $y' = -\dfrac{y}{x}$

3. $y' = \dfrac{4}{y}$

4. $y' = -\dfrac{2x+5}{4y-2}$

5. $y' = -\dfrac{3x+y}{x-6y}$

6. $y' = \dfrac{x+1}{1-y}$

7. $y' = \dfrac{(x-y)^2 + 2y}{2x}$

8. $y' = \dfrac{b^2x}{a^2y}$

9. $y' = -\dfrac{y}{x}$

10. $y' = \dfrac{2y^2 + 3x^2y + 10xy^2}{3y^2 - 4xy - x^3 - 10x^2y + 1}$

11. $y' = \dfrac{4xy - 9x^2 - 5y - 3}{5x - 2x^2 - 1}$

12. $y' = \dfrac{2\sqrt{x+y} - y}{2x + 3y}$

13. $y' = \dfrac{2y\sqrt{x+y} - 1}{1 - 2x\sqrt{x+y}}$

14. $y' = \dfrac{2 - 4x - 3y}{3x + 3}$

15. $y' = \left(1 - 4\sqrt{x}\right)\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

16. $y' = \dfrac{y}{x\,(2y-1)}$

17. $y' = -\dfrac{y}{x}$

18. $y' = \dfrac{\tan e^y}{e^y}$

19. $y' = 3e^{x-y}$

20. $y' = \dfrac{2xy}{x^2+1}$

21. $y' = \dfrac{1-x+y}{1-y+x}$

22. $y' = \dfrac{x(1-e^{x^2})}{y(e^{y^2}-1)}$

23. $y' = -x$

24. $y' = -\dfrac{y}{x\ln x}$

25. $y' = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + x}$

26. $y' = \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{x\ln y - y}{y\ln x - x}\right)$

27. $y' = \dfrac{1}{x\ln x}$

28. $y' = \dfrac{e^x(1+e^y)}{e^y} = (e^{-y}+1)\ln(1+e^y)$

29. $y' = \dfrac{y(x - \ln y)}{x\ln x}$

30. $y' = \dfrac{e^x}{1 + x\,e^y} = \dfrac{e^y}{1-y}$

31. $y' = \dfrac{y^2}{e^{\ln y} - xy} = \dfrac{y}{1-x}$

32. $y' = \dfrac{1}{e^{x+y}[\cos(e^{x+y}) - 1]} - 1$

33. $y' = \dfrac{e^{x\cos y}\cos y - 3}{x\,e^{x\cos y}\operatorname{sen} y} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\tan y} - \dfrac{1}{x\operatorname{sen} y}\right)$

34. $y' = -\dfrac{\cos(x+a)}{\operatorname{sen}(y-b)}$

35. $y' = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos y - 1} = -\dfrac{\operatorname{sen} x(\csc y + \cot y)}{\operatorname{sen} y}$

36. $y' = \dfrac{\operatorname{sen}(4x)\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2y)\cos(2y)} = \dfrac{\operatorname{sen}(8x)}{\operatorname{sen}(8y)}$

37. $y' = -\dfrac{\operatorname{sen} x\, e^{\cos x}}{\cos y(1 + e^{\operatorname{sen} y})}$

38. $y' = \dfrac{2 - y\cos(xy)}{x\cos(xy)} = \dfrac{2\sec(xy) - y}{x}$

39. $y' = -\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} y}$

40. $y' = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y \cdot e^{\cos y}}$

41. $y' = \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} y - 1}{x \cos y}$

42. $y' = \left(\dfrac{y^2+1}{y^2+1-x}\right)\operatorname{arc\,tan} y$

43. $y' = \dfrac{\cot(x+y)}{1-\cot(x+y)}$

44. $y' = \dfrac{1}{2^y \ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2^x + \ln 8}$

45. $y' = -\dfrac{y}{e^{\operatorname{sen} y}\cos y + x - 2}$

46. $y' = \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{x\ln y - y}{y\ln x - x}\right) = \dfrac{y^2}{x^2}\left(\dfrac{1-\ln x}{1-\ln y}\right)$

47. $y' = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y) + \cos(x+y)}{1 - \operatorname{sen}(x+y) - \cos(x+y)}$

48. $y' = \dfrac{\tan^2(xy) + y^2\sec^2(xy)}{\tan(xy) - xy\sec^2(xy)}$

49. $y' = \dfrac{x^2+y+1}{(x^2+1)\operatorname{arc\,cot} x}$

50. $y' = \dfrac{y \cdot e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}(\operatorname{sen} y + \operatorname{arc\,cos}(e^x))}$

EJERCICIO 35

1. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = 24$

2. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{170}{(5x+3)^3}$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{4ab^2}{(ax-b)^2}$

5. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 24a^3(ax+b)$

6. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = \operatorname{sen} x + \cos x$

7. $y'' = -\csc^2 x$

8. $y''' = -\dfrac{72}{(x-1)^5}$

9. $y'' = e^x \sec^2 e^x(2e^x \tan e^x + 1) = e^x \sec^2 e^x(2e^x y + 1)$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{18y-6}{(2-3x)^2}$

11. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{9}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{x^2+y^2}{y^3} = -\dfrac{16}{y^3}$

13. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{2}{x^3}$

14. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{\operatorname{sen} x\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 x\cos y}{\operatorname{sen}^3 y} = -\csc y\left(\operatorname{sen} x + \dfrac{\cos^2 x\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}\right)$

15. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = -x^2\cos x - 6x\operatorname{sen} x + 6\cos x$

16. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{12}{(x+1)^4}$; $\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{2\cdot n!\cdot(-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+1}}$

17. $y'' = \dfrac{2y}{(x+1)^2}$

18. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = -2\sec^2 x\tan x$

19. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2\cos^2 x}{(1+\operatorname{sen} x)^3} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{(1+\operatorname{sen} x)^2} = \dfrac{2-\operatorname{sen} x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}$

20. $y'' = \dfrac{-12}{(x+2y)^3}$; $y''' = \dfrac{-108x}{(x+2y)^5}$

EJERCICIO 36

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{2\,\text{sen}\,2\theta + 3\cos 2\theta}{2\cos 2\theta - 3\,\text{sen}\,2\theta}$

2. $\frac{dy}{dx} = 0$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{5\,\text{sen}\,\theta\cos 5\theta + \text{sen}\,5\theta\cos\theta}{5\cos\theta\cos 5\theta - \text{sen}\,5\theta\,\text{sen}\,\theta}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2\theta\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\theta\cos\theta}{\cos 2\theta\cos\theta - \text{sen}\,2\theta\,\text{sen}\,\theta}$

5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos 2\theta + \cos\theta}{\text{sen}\,2\theta + \text{sen}\,\theta} = -\cot\left(\frac{3\theta}{2}\right)$

6. $\frac{dy}{dx} = \csc\theta - \cot\theta$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{a\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta}{a\cos\theta - \text{sen}\,\theta}$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}\,\theta\tan\frac{\theta}{2} + \cos\theta}{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2} - \text{sen}\,\theta}$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos\theta - 2\cos 2\theta}{2\,\text{sen}\,2\theta - 3\,\text{sen}\,\theta}$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}\,\theta + 2\theta\cos\theta}{\cos\theta - 2\theta\,\text{sen}\,\theta}$

11. -1

12. $2 + \sqrt{3}$

13. 3

14. $-a$

15. $-\frac{1}{4}$

EJERCICIO 37

1. $\frac{dy}{dx} = 4t\sqrt{t}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{36t^2}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{t^2 - t}}{2t - 1}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}\csc\theta$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{2t^2 - 3t^3}{2\sqrt{t-1}}$

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta + 4\,\text{sen}\,\theta}{5\cos\theta + \text{sen}\,\theta}$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{(t-1)^2(1-2t-t^2)}{(t^2+1)}$

8. $\frac{dy}{dx} = \csc\frac{\theta}{2}(4 - 8\cos^2\theta)$

9. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{5t^4}$

10. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\cos\theta\cot^2\theta$

11. $\sqrt{3}$

12. $\frac{1}{4m^2}$

13. $-\frac{1}{3}$

14. $-\frac{1}{3}$

15. 1

16. $-\frac{1}{10}$

CAPÍTULO 5

EJERCICIO 38

1. Sub-tangente = 1
   Sub-normal = 1
   Tangente = $\sqrt{2}$
   Normal = $-\sqrt{2}$

2. Sub-tangente = $-\frac{12}{7}$
   Sub-normal = -84
   Tangente = $-\frac{60}{7}\sqrt{2}$
   Normal = $-60\sqrt{2}$

3. Sub-tangente = $-\frac{12}{7}$
   Sub-normal = -84
   Tangente = $-\frac{60}{7}\sqrt{2}$
   Normal = $60\sqrt{2}$

4. Sub-tangente = $\frac{7}{4}$
   Sub-normal = 28
   Tangente = $\frac{7\sqrt{17}}{4}$
   Normal = $7\sqrt{17}$

5. Sub-tangente = $-\frac{3}{2}$
   Sub-normal = -6
   Tangente = $-\frac{3}{2}\sqrt{5}$
   Normal = $3\sqrt{5}$

6. Sub-tangente = -18
   Sub-normal = $-\frac{1}{2}$
   Tangente = $-3\sqrt{37}$
   Normal = $\frac{\sqrt{37}}{2}$

7. Sub-tangente = 8

   Sub-normal = $\frac{1}{2}$

   Tangente = $2\sqrt{17}$

   Normal = $\frac{\sqrt{17}}{2}$

8. Sub-tangente = -2

   Sub-normal = $-\frac{1}{8}$

   Tangente = $-\frac{\sqrt{17}}{2}$

   Normal = $\frac{\sqrt{17}}{8}$

9. Sub-tangente = $-\frac{3}{2}$

   Sub-normal = -6

   Tangente = $-\frac{3\sqrt{5}}{2}$

   Normal = $-3\sqrt{5}$

10. Sub-tangente = $-\frac{3}{4}$

    Sub-normal= $-\frac{16}{27}$

    Tangente = $-\frac{\sqrt{145}}{12}$

    Normal = $\frac{2\sqrt{145}}{27}$

11. $T: 4x + y - 1 = 0$
    $N: x - 4y + 38 = 0$
12. $T: x + y - 1 = 0$
    $N: x - y + 1 = 0$
13. $T: y = 0$
    $N: 2x - 1 = 0$
14. $T: 8x - y - 12 = 0$
    $N: x + 8y - 34 = 0$
15. $T: 4x + y + 8 = 0$
    $N: x - 4y - 15 = 0$
16. $T: \sqrt{5}x + 2y - 9 = 0$
    $N: 2x - \sqrt{5}y = 0$
17. $T: x + 2y - 7 = 0$
    $N: 2x - y - 4 = 0$
18. $T: 2x + y - 2 = 0$
    $N: x - 2y + 4 = 0$
19. $T: y - 1 = 0$
    $N: 2x - \pi = 0$
20. $T: 3\sqrt{3}x + 6y - \left(3 + \sqrt{3}\pi\right) = 0$
    $N: 12x - 6\sqrt{3}y + \left(3\sqrt{3} - 4\pi\right) = 0$
21. $T: 4x - 2y + (6 - \pi) = 0$
    $N: 4x + 8y - (24 + \pi) = 0$
22. $T: 2x - y - 6 = 0$
    $N: x + 2y - 8 = 0$
23. $T: x + y - 2 = 0$
    $N: x - y = 0$
24. $T: 6x + 2y - 9 = 0$
    $N: 2x - 6y + 7 = 0$
25. $T: x - 2 = 0$
    $N: 2y - 1 = 0$
26. $T: 7x - y - 8 = 0$
    $N: x + 7y - 94 = 0$
27. $T: x - ey = 0$
    $N: ex + y - 1 - e^2 = 0$
28. $T: 8x + y - 7 = 0$
    $N: 2x - 16y + 47 = 0$

EJERCICIO 39

1. Agudo 26° 33′, obtuso 153° 27′
2. Agudo 73° 42′, obtuso 106° 18′
3. Agudo 78° 41′, obtuso 101° 19′
4. Agudo 35° 15′, obtuso 144° 44′
5. Agudo 28° 23′, obtuso 151° 36′
6. Agudo 28° 4′, obtuso 151° 55′
7. Agudo 71° 33′, obtuso 104° 28′
8. 125° 32′
9. $\theta = 63° 26'$
10. $\theta = 18° 26'$
11. $\theta = 6° 54', 57° 25'$
12. $\theta = 33° 41'$
13. $\theta = 54° 44'$

EJERCICIO 40

1. $r = \frac{5\sqrt{5}}{3}, \frac{d\theta}{ds} = \frac{3\sqrt{5}}{25}$
2. $r = \frac{17\sqrt{17}}{8}, \frac{d\theta}{ds} = \frac{8\sqrt{17}}{289}$
3. $r = 4\sqrt{2}, \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{8}$
4. $r = \frac{5\sqrt{10}}{3}, \frac{d\theta}{ds} = \frac{3\sqrt{10}}{50}$
5. $r = 1, \frac{d\theta}{ds} = 1$

6. $r=\frac{17\sqrt{17}}{2}, \frac{d\theta}{ds}=\frac{2\sqrt{17}}{289}$

7. $r=\frac{1}{2}, \frac{d\theta}{ds}=2$

8. $r=\frac{\sqrt{11}}{4}, \frac{d\theta}{ds}=\frac{4\sqrt{11}}{11}$

9. $C(-2, 5)$

10. $C\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

11. $C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

12. $C(-2, 3)$

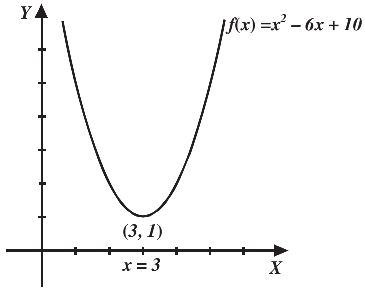
13. $C\left(\frac{23}{2}, -32\right)$

EJERCICIO 41

1. Punto mínimo $(3, -4)$
   Creciente en $(3, \infty)$
   Decreciente en $(-\infty, 3)$
2. Punto máximo $\left(\frac{5}{6}, -\frac{23}{12}\right)$
   Creciente en $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right)$
   Decreciente en $\left(\frac{5}{6}, \infty\right)$
3. Punto máximo $(-1, 2)$
   Punto mínimo $(1, -2)$
   Creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
   Decreciente en $(-1, 1)$
4. Punto máximo $(0, 0)$
   Punto mínimo $(4, -32)$
   Creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$
   Decreciente en $(0, 4)$
5. Punto máximo $(-1, 5)$
   Punto mínimo $\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$
   Creciente en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
   Decreciente en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
6. Punto máximo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{17}{4}\right)$
   Punto mínimo $\left(\frac{2}{3}, \frac{29}{27}\right)$
   Creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
   Decreciente en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$
7. Punto máximo $(2, 15)$
   Punto mínimo $(-1, -12)$
   Creciente en $(-1, 2)$
   Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
8. Punto máximo $\left(-1, \frac{8}{3}\right)$
   Punto mínimo $(3, -8)$
   Creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$
   Decreciente en $(-1, 3)$
9. Punto máximo $\left(-2, \frac{34}{3}\right)$
   Punto mínimo $\left(3, -\frac{19}{2}\right)$
   Creciente en $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$
   Decreciente en $(-2, 3)$
10. Punto máximo $\left(1, \frac{17}{12}\right)$
    Punto mínimo $(0, 1)\left(3, -\frac{5}{4}\right)$
    Creciente en $(0, 1) \cup (3, \infty)$
    Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$
11. Punto máximo $(1, -3)$
    Creciente $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
    Decreciente $(1, 2) \cup (2, \infty)$
12. No tiene máximos y mínimos
    Decreciente en $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$
13. Punto máximo $\left(2, \frac{1}{2}\right)$
    Punto mínimo $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$
    Creciente en $(-2, 2)$
    Decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
14. Punto mínimo $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$
    Creciente en $(0, 2) \cup (2, \infty)$
    Decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
15. Punto máximo $(-6, -12)$
    Punto mínimo $(0, 0)$
    Creciente en $(-\infty, -6) \cup (0, \infty)$
    Decreciente en $(-6, -3) \cup (-3, 0)$

EJERCICIO 42

1.



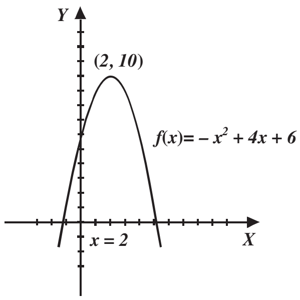
Punto mínimo (3, 1)

Crece $(3, \infty)$

Decrece $(-\infty, 3)$

Concavidad hacia arriba $(-\infty, \infty)$

2.



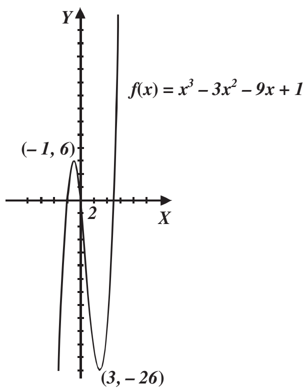
Punto máximo (2, 10)

Crece $(-\infty, 2)$

Decrece $(2, \infty)$

Concavidad hacia abajo $(-\infty, \infty)$

3.



Punto máximo $(-1, 6)$, Punto mínimo $(3, -26)$

Crece $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

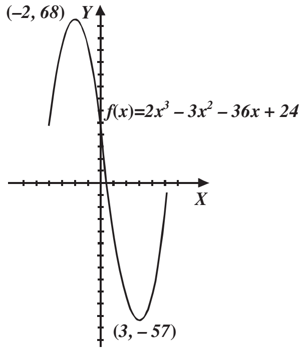
Decrece $(-1, 3)$

Concavidad hacia abajo $(-\infty, 1)$

Concavidad hacia arriba $(1, \infty)$

Punto de inflexión $(1, -10)$

4.



Punto máximo $(-2, 68)$

Punto mínimo $(3, -57)$

Crece $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$

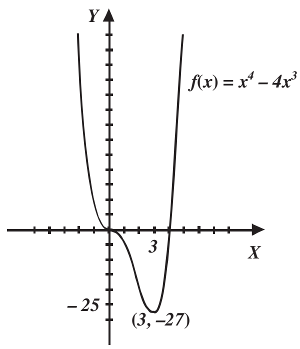
Decrece $(-2, 3)$

Concavidad hacia abajo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Concavidad hacia arriba $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

Punto de inflexión $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

5.



Punto mínimo $(3, -27)$

Puntos de inflexión $(0, 0)$, $(2, -16)$

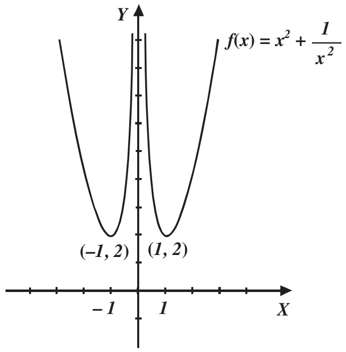
Crece $(3, \infty)$

Decrece $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

Concavidad hacia abajo $(0, 2)$

Concavidad hacia arriba $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

6.



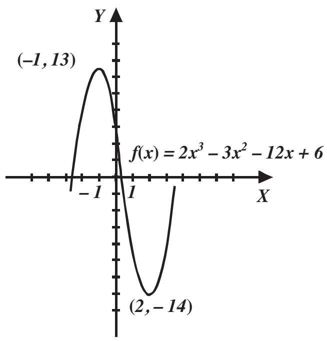
Puntos mínimos $(-1, 2)$, $(1, 2)$

Crece $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

Decrece $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Concavidad hacia arriba $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

7.



Punto máximo $(-1, 13)$

Punto mínimo $(2, -14)$

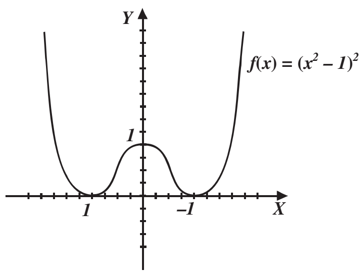
Crece $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

Decrece $(-1, 2)$

Concavidad hacia abajo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Concavidad hacia arriba $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, Punto de inflexión $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

8.



Punto máximo $(0, 1)$

Puntos mínimos $(-1, 0)$, $(1, 0)$

Crece $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

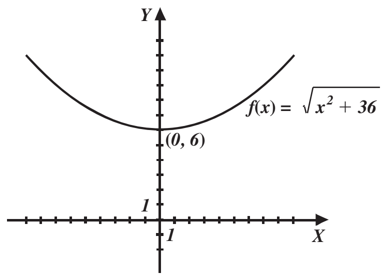
Decrece $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Concavidad hacia abajo $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Concavidad hacia arriba $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$

Punto de inflexión $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right)$

9.



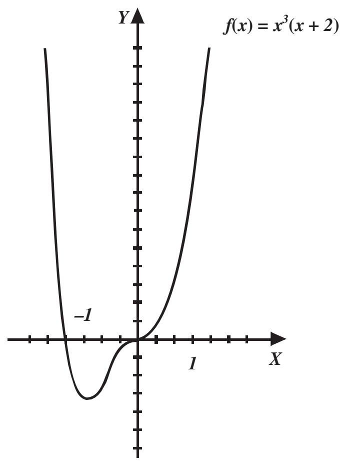
Punto mínimo $(0, 6)$

Crece $(0, \infty)$

Decrece $(-\infty, 0)$

Concavidad hacia arriba $(-\infty, \infty)$

10.



Punto mínimo $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$

Puntos de inflexión $(0, 0)$, $(-1, -1)$

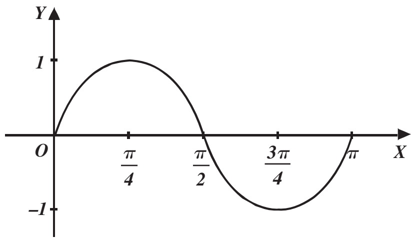
Crece $\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)$

Decrece $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$

Concavidad hacia abajo $(-1, 0)$

Concavidad hacia arriba $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

11.



Punto mínimo $\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$

Punto máximo $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

Punto de inflexión $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Decrece $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

Crece $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

Concavidad hacia arriba $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Concavidad hacia abajo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

EJERCICIO 43

1. 20 y 20
2. -25 y 25
3. 2 pulgadas por lado y el volumen de 128 ln^3
4. $V = 6144\pi \text{ cm}^3$
5. $V = \frac{500\sqrt{6\pi}}{9\pi} \text{ in}^3$
6. $r = \sqrt[4]{\frac{100}{3}}$

   $h = \sqrt[4]{\frac{400}{3}}$
7. $A = 54 \text{ cm}^2$
8. $A = 24u^2$
9. Número = 1
10. Base = $\sqrt{3}\, r$

    altura = $\frac{3}{2} r$
11. $(1, 1), (-1, -1)$
12. $A = \frac{32\sqrt{3}}{9} u^2$
13. Base = $2\sqrt{2}$

    altura = $\sqrt{2}$
14. $2\sqrt{6}$ y $2\sqrt{3}$ ft
15. $d = 2\sqrt{5}$
16. 8 y 8
17. $2\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$ unidades
18. $A = 6u^2$
19. $h = 2$ cm
20. Cada lado mide $2u$
21. 20 y 20
22. $4\sqrt{2}$ y 8
23. $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
24. $A = 15u^2$
25. $A = 2ab\, u^2$
26. $4x + 3y - 24 = 0$
27. Radio $4\sqrt{2}$

    altura = $8\sqrt{2}$ pulgadas
28. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + k^2}, \frac{k}{2}\right)$
29. Números 4 y 4
30. $\frac{2P}{4+\pi}; \frac{P}{4+\pi}$
31. 400 m, 800 m
32. $\frac{100\sqrt{3\pi}}{9+\sqrt{3\pi}}$ cm, $\frac{900}{9+\sqrt{3\pi}}$ cm
33. $\frac{2000\sqrt{3\pi}}{27} \text{ cm}^3$
34. $25\sqrt{2}$ cm $\times$ $25\sqrt{2}$ cm
35. $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$ in $= \frac{10}{\sqrt{\pi}}$ in
36. $5\sqrt{5}$ m
37. $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$
38. $P(2, 0)$,

    $P\left(-\frac{\sqrt{6}+2}{2}, \sqrt{6} - \frac{3}{2}\right)$

EJERCICIO 44

1. $6\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\frac{17}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $10\frac{\text{m}}{\text{s}}$
2. $0 < t < 4$ y $6 < t$
3. *a*) $s = 22$ si $t = 2$, $s = 18$ si $t = 4$

   $a = -6$ si $t = 2$, $a = 6$ si $t = 4$

   b) $s = 20$, $v = -3$ si $t = 3$

   c) "s" crece cuando $0 < t < 2$ o $t > 4$

   d) "v" crece cuando $0 < t < 2$ o $t > 4$
4. *a*) $t = 18$ s, $v = -54\frac{\text{m}}{\text{s}}$

   b) $t = 9$ s, $s = 243$ m
5. $v = -2\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $s = 35$ m

EJERCICIO 45

1. $\frac{5}{2}\sqrt{10}$ cm
2. $\frac{3}{5}\sqrt{449}\frac{\text{m}}{\text{min}}$
3. $\frac{360}{\sqrt{17}}\frac{\text{m}}{\text{s}}$
4. $\frac{4}{75}\sqrt{\frac{5}{\pi}} \text{ m}^3$
5. $-\frac{25}{12}\frac{\text{m}}{\text{s}}$
6. $10\pi\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$
7. $-\frac{3}{49\pi}\frac{\text{m}}{\text{min}}$
8. $-\frac{405}{8\sqrt{14}}\frac{\text{km}}{\text{h}}$

9. *a*) $100\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

b) $\dfrac{820}{\sqrt{73}}\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

10. $-\dfrac{4}{9\pi}\dfrac{\text{m}}{\text{min}}$

11. 90.58 km/h

12. $4.8\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

13. $\dfrac{7}{4\pi}\dfrac{\text{pies}}{\text{min}}$

14. $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{5}\dfrac{\text{cm}}{\text{min}}$

15. $\dfrac{14}{3}\dfrac{u}{s}$

16. $\dfrac{7}{50}\sqrt{29}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

17. $1.95\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$.4342\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

EJERCICIO 46

1. *a*) $I = \$15\,275.00$, $U = \$8\,370.00$, $Q = \$47.90$

   b) $I = \$9\,424.00$, $U = \$7\,208.00$, $Q = \$26.93$

   $Q = \$16.00$ por artículo
2. Costo promedio mínimo = \$14.80 por artículo

   Se deben producir 1 225 artículos para un costo mínimo
3. Ingreso real: $I(31) - I(30) = \$156.00$

   Ingreso aproximado: \$160.00
4. 59 metros
5. $p(x) = 100 - \dfrac{1}{800}x$

   \$50.00 por boleto

EJERCICIO 47

1. $\dfrac{15}{2}$
2. 2
3. -1
4. $\dfrac{1}{3}\ln 2$
5. 1
6. $-\dfrac{9}{4}$
7. 1
8. $\dfrac{1}{3}$
9. e
10. 0
11. 1
12. $-\dfrac{1}{2}$
13. $e^{-\frac{1}{2}}$
14. 0
15. e
16. ∞
17. -1
18. 1
19. 1
20. 0

EJERCICIO 48

1. $c = 0$
2. $c = \dfrac{3}{4}$
3. $c = \dfrac{5}{2}$
4. $c = \dfrac{3}{4}$
5. $c = \pm\sqrt{3}$
6. $c = 0.36$
7. $c = \pm\sqrt{\dfrac{13}{3}}$
8. $c = 0$
9. $c = 0$
10. $c = \pi$
11. No es continua en $x = 1$
12. $c = 1$

EJERCICIO 49

1. $c = \dfrac{3}{2}$
2. $c = \dfrac{1}{2}$
3. $c = \sqrt{3}$
4. $c = 0$
5. $c = 3$
6. $c = -1$
7. $c = 1.7613$
8. $c = 2.1750$
9. $c = 0.5413$
10. $c = 1.3204$

EJERCICIO 50

1. $dy = a\,dx$
2. $dy = (2ax + b)dx$
3. $df(x) = (3x^2 - 4x)dx$
4. $ds = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\right)dt$
5. $dh(t) = -36t(5 - 3t^2)^5\,dt$
6. $dy = -\dfrac{6x}{(x^2-2)^5}$
7. $dy = -\dfrac{1}{x^2}\sqrt[3]{\left(\dfrac{x}{2x+3}\right)^2}\,dx$
8. $dy = \dfrac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$
9. $df(x) = (7x + 5)(x - 1)^2(x + 3)^3\,dx$
10. $dh(s) = \dfrac{8}{(2s+3)^2}\,ds$
11. $dg(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}\,dx$
12. $dy = \dfrac{x+8}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}}\,dx$
13. $dy = \dfrac{-2abx}{(ax^2-b)\sqrt{a^2x^4-b^2}}\,dx$
14. $df(x) = (1 + 2\,\text{sen}\,2x)dx$
15. $df(t) = 6\tan^2 2t\sec^2 2t\,dt$
16. $dy = -2\tan x(\sec x - \sec^2 x)dx$
17. $dg(x) = \dfrac{-2\cos x}{(1+\text{sen}\,x)^2}\,dx$

18. $ds(t) = \dfrac{-t\ \text{sen}\ t - 2\cos t}{2t^2\sqrt{\cos t}}\,dt$

19. $df(x) = \dfrac{\sec x}{\sec x + 1}\,dx = \dfrac{1}{1 + \cos x}\,dx$

20. $dy = \dfrac{2x}{x^2 + 5}\log e\,dx$

21. $dy = \dfrac{x}{x^2 - 3}\,dx$

22. $dy = \dfrac{3}{2x^2x + 32x - 4}\,dx$

23. $dy = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}e^{\sqrt{x^3}}\,dx$

24. $dy = 2^{x^3+5}(3x^2\ln 2)\,dx$

25. $dh(t) = -\dfrac{2}{(e^t - e^{-t})^2}\,dt$

26. $df(x) = x(\ln x^2 + 1)\,dx$

27. $df(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx$

28. $dy = -\dfrac{2}{x^2 + 4}\,dx$

29. $dy = \dfrac{1}{2x\sqrt{x - 1}}\,dx$

30. $dy = -\dfrac{3}{x\sqrt{9x^6 - 1}}\,dx$

EJERCICIO 51

1. $\approx \dfrac{167}{18} = 9.277$

2. $\approx \dfrac{89}{27} = 3.296$

3. $\approx \dfrac{17}{8} = 2.125$

4. $\approx \dfrac{45 + 2\sqrt{3}\pi}{90} = 0.620$

5. $\approx \dfrac{108 + \sqrt{3}\pi}{36} = 3.151$

6. $\approx \dfrac{76 + 30\sqrt{3} + 2\pi}{15} = 8.949$

7. $\approx \dfrac{5489}{4} = 1372.25$

8. $\approx \dfrac{180\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - \pi\left(7 + \sqrt{2}\right)}{360} = 0.8549$

9. $\approx \dfrac{45 - 3\pi}{720} = 0.054$

10. $\approx \dfrac{9 - \sqrt{3}\pi}{9\sqrt{3}} = 0.228$

11. $dA = 0.286\ \text{cm}^2$

12. $dA = 2.265\ \text{cm}^2$, $dV = 3.341\ \text{cm}^3$

13. $dV = 1.8\pi\ \text{cm}^3$

14. Lado $= 8$ cm

15. Error relativo $= \dfrac{dA}{A} = 0.00249$,

    Error porcentual $= 0.249\%$

    Error relativo $= \dfrac{dV}{V} = 0.00374$,

    Error porcentual $= 0.374\%$

16. Lado $= \dfrac{1}{9}$ cm

17. $d\phi = 0.02$ cm

18. Error relativo $= \dfrac{dA}{A} = 0.00088$,

    Error porcentual $= 0.088\%$

Solución a los ejercicios de cálculo integral

CAPÍTULO 6

EJERCICIO 1

1. 354
2. -40
3. $-\frac{5}{4}$
4. $\frac{223}{70}$
5. 14 560
6. 17
7. $-\frac{322}{3}$
8. $3\left(1+\frac{b}{2a}\right)$
9. 63
10. $\frac{853}{70}$
11. 414
12. 81

EJERCICIO 2

1. $57u^2$
2. $5u^2$
3. $\frac{32}{3}u^2$
4. $\frac{7}{2}u^2$
5. $\frac{10}{3}u^2$
6. $\frac{bh}{2}u^2$
7. $12u^2$
8. $2u^2$
9. $\frac{9}{4}u^2$
10. $242u^2$

CAPÍTULO 7

EJERCICIO 3

1. $\frac{x^7}{7}+C$
2. x^5+C
3. $\frac{bx^4}{4}+C$
4. $\frac{\sqrt{3}x^3}{3}+C$
5. $ax+C$
6. $\frac{3}{4}x+C$
7. $\frac{1}{3}x+C$
8. $\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}+C$
9. $4x\sqrt[4]{x}+C$
10. $-\frac{1}{2x^2}+C$
11. $-\frac{5}{3x^3}+C$
12. $4\ln x+C$
13. $\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3}+C$
14. $9\sqrt[3]{x^2}+C$
15. $\frac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8}+C$
16. $3a\sqrt[3]{x}+C$
17. $\frac{5}{2}\ln x+C$
18. $\frac{2x\sqrt{bx}}{3}+C$
19. $\frac{15\sqrt[3]{x^2}}{2}-3x\sqrt[3]{x}+C$
20. $-\frac{3}{4x^4}+\frac{2}{x}-6\ln x+C$
21. $\frac{3t\sqrt[3]{at}}{4}+C$
22. $\frac{2t\sqrt{6t}}{3}+C$
23. $\frac{4x^6}{3}-x^5-x^4-2x^3-x^2-3x+C$
24. $\frac{ax^4}{4}-\frac{bx^3}{3}-\frac{cx^2}{2}+dx+C$
25. $\frac{x^3}{3\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{3x^2}{2\sqrt{a}}-5\sqrt{b}x+C$
26. $\frac{x^4}{4}-2x^3-7x+C$
27. $5x^{\frac{3}{5}}-\frac{5x^{\frac{4}{5}}}{2}+C$
28. $6\sqrt[3]{x^2}-\frac{20\sqrt[4]{x^3}}{3}+C$
29. $\frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7}-\frac{15y^{\frac{7}{3}}}{7}-\frac{8y^{\frac{5}{4}}}{5}-\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}+C$
30. $\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{3y^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{4}{3y^{\frac{3}{4}}}+C$
31. $\frac{3t^3\sqrt[3]{t}}{2}-\frac{9t^2\sqrt[3]{t}}{7}+\frac{3t\sqrt[3]{t}}{2}+C$
32. $\frac{3t\sqrt[3]{7t}}{4}+C$
33. $\frac{(3x+4)^7}{21}+C$
34. $\frac{(ax^2-b)^6}{12a}+C$
35. $\frac{(t^3-4)^3}{9}+C$
36. $-\frac{(a-by)^5}{5b}+C$
37. $\frac{t^5}{5}-4t^3+36t+C$
38. $\frac{x^4}{4}+\frac{8x^3}{3}+8x^2+C$
39. $\frac{x^6}{6}+\frac{3x^5}{5}+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+C$
40. $\frac{2(m+ny)\sqrt{m+ny}}{3n}+C$
41. $\frac{2(5x-3)^{\frac{3}{2}}}{15}+C$
42. $\frac{1}{a}\sqrt{at^2+b}+C$

43. $\frac{1}{6}\sqrt[3]{(9x-1)^2} + C$

44. $\frac{x^2}{2} - \frac{16x\sqrt{x}}{3} + 16x + C$

45. $-\frac{1}{18(3x^2-4)^3} + C$

46. $-\frac{5}{3(3x-4)} + C$

47. $-\frac{2}{3(2x^2+5)^3} + C$

48. $\frac{2\left(\sqrt{x}-b\right)^3}{3} + C$

49. $\frac{1}{a}\ln(at+b) + C$

50. $\frac{1}{6}\ln|3x^2-4| + C$

51. $\ln|x+3| + C$

52. $\ln|x^2-3| + C$

53. $-\frac{1}{(x^2-3x+6)} + C$

54. $\frac{2(x^3-6x+3)^{\frac{3}{2}}}{9} + C$

55. $-\frac{1}{an(m-1)(ay^n+b)^{m-1}} + C \;\forall\; m \neq 1$

56. $-\frac{(1-e^{3x})^3}{9} + C$

57. $-\frac{(4-\ln|x+3|)^4}{4} + C$

58. $-\frac{(1-\operatorname{sen} 4x)^4}{16} + C$

59. $-\frac{2(3+\cot x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

60. $-\sqrt{1-\sec 2x} + C$

61. $-\frac{1}{a}\ln|1-\operatorname{sen} ax| + C$

62. $\frac{4}{3}\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)^{\frac{3}{2}} + C$

63. $\frac{(2+\ln|\operatorname{sen} x|)^2}{2} + C$

64. $-\frac{1}{2(1-\cos^2 x)^2} + C$

65. $\frac{1}{3b}\operatorname{sen}^3 bx + C$

66. $-\frac{\cot^2 mx}{2m} + C$

67. $-\frac{\cos^3 4x}{12} + C$

68. $\frac{2\sqrt{\operatorname{sen} 5x+4}}{5} + C$

69. $4x - \ln(x+2)^6 + C$

70. $\frac{3x^2}{2} + 3x + \ln|(x-1)^5| + C$

71. $-\frac{1}{\ln y} + C$

72. $\frac{1}{2}\ln|\ln 3x| + C$

73. $\frac{2(ax^{n+1}+b)^{\frac{3}{2}}}{3a(n+1)} + C$

74. $\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^3} + C$

75. $-\frac{1}{3}\csc 3x + C$

76. $-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} + 4\ln(x+1) + C$

77. $\ln\left|\frac{(x+2)^3}{(x+5)^4}\right| + C$

78. $\ln\left|(2x-1)^{\frac{3}{2}}(3x-4)^{\frac{5}{3}}\right| + C$

79. $-3\sqrt[3]{\cos x} + C$

80. $\frac{2}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$

81. $2\sqrt{1-\cot w} + C$

82. $-\frac{3}{2}\sqrt{2\cos^2 y-1} + C$

83. $2\sqrt{1-\cos\alpha} + C$

84. $\frac{4}{7}\tan^{\frac{7}{4}} x + C$

EJERCICIO 4

1. $\frac{1}{4}e^{4x}+C$
2. $16\,e^{\frac{x}{2}}+C$
3. $\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$
4. $\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x}}+C$
5. $\frac{1}{3}e^{3x}+C$
6. $-\frac{1}{4}e^{\cos 4x}+C$
7. $\frac{2}{3}e^{x^3}+C$
8. $\frac{b^{4x}}{4\ln b}+C$
9. $\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$
10. $\frac{2^x e^x}{1+\ln 2}+C$
11. $3\sqrt[3]{e^x}+C$
12. $\frac{2}{3}\sqrt{e^{3x}}+C$
13. $-\frac{1}{5^{4x}\ln 625}+C$
14. $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x^2}}+C$
15. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{e^{4x}}+C$
16. $x^3-\frac{1}{3}e^{x^3}+C$
17. $e^{x^2-3x+1}+C$
18. $-\frac{5}{2\sqrt[5]{e^{2t}}}+C$
19. $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{\sec 2x}}+C$
20. $-\frac{1}{8e^{2t^4}}+C$
21. $\frac{4^x\cdot e^{2x}}{2+\ln 4}+C$
22. $2\left(e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{4}}\right)+C$
23. $\frac{1}{6}e^{6x}-\frac{4}{3}e^{3x}+4x+C$
24. $\frac{5^{x^2}}{\ln 25}+C$
25. $\frac{1}{4}(e^{4x}-e^{-4x})-2x+C$
26. $\frac{1}{3}e^{\tan 3x}+C$
27. $\frac{5^{x^3}}{3\ln 5}+C$
28. $\frac{10^{3x}}{3\ln 10}-\frac{2^x}{\ln 2}+C$
29. $n\left(e^{\frac{x}{n}}-\frac{1}{\ln a}a^{\frac{x}{n}}\right)+C$
30. $\frac{1}{2}(e^{2x}+5e^{-2x})+C$
31. $-\frac{1}{ae^{ax}}-x+C$
32. $-e^{\cos^2 x}+C$
33. $\frac{1}{2}e^{\text{arc sen }2x}+C$
34. $e^{\text{arc tan }x}+C$
35. $\frac{3^{4x}(3\cdot 3^{4x}+8\cdot 3^{2x}+6)}{24\ln 3}+C$

EJERCICIO 5

1. $-\frac{1}{5}\cos 5x+C$
2. $\frac{1}{6}\text{sen }6x+C$
3. $-4\cos\frac{x}{4}+C$
4. $\frac{1}{b}\ln|\sec bx|+C$
5. $a\tan\frac{x}{a}+C$
6. $-\frac{1}{a}\cot ax+C$
7. $\frac{1}{b}\tan bx+C$
8. $\sec x+C$
9. $-4\csc\frac{t}{4}+C$
10. $-\frac{1}{8}\cos 4x^2+C$
11. $\frac{5}{3}\text{sen}\frac{x^3}{5}+C$
12. $-\frac{1}{2}\csc^2 x+C$
13. $\frac{1}{a}\sec ax+C$
14. $\frac{3}{8}\tan 4x^2+C$
15. $-\frac{1}{3}\cot(3x-1)+C$
16. $\frac{1}{a}\ln|\text{sen}(ax-b)|+C$
17. $\frac{1}{a}\ln|\sec ax+\tan ax|+C$
18. $\frac{1}{8}\ln|\csc 4x^2-\cot 4x^2|+C$
19. $-2\sqrt{\csc x}+C$
20. $\frac{1}{b}(\tan b\theta-\cot b\theta)+C$
21. $\frac{2}{3}(\csc 3x-\cot 3x)-x+C$
22. $\frac{2}{5}(\tan 5x+\sec 5x)-x+C$
23. $\frac{1}{2}[\text{sen}^2 x-2\cos x]+C$
24. $-\frac{1}{2}\text{sen}(2-x^2)+C$
25. $\ln|\csc x-\cot x|+\cos x+C$
26. $\text{sen }x-\cos x+C$
27. $\ln|\cos x-1|+C$
28. $\cot\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+C$
29. $-\cot w+C$
30. $\frac{1}{2}(2\tan x-x)+C$
31. $-\frac{1}{3}\cot^3 x+C$
32. $\frac{2\sqrt{\text{sen }x}(\cos^2 x+4)}{5}+C$
33. $\frac{1}{4}\ln|1-4\cot w|+C$
34. $\frac{-[x\cos x-2(\text{sen }x-1)]}{\cos x}+C$
35. $-2\ln\left|\cot\left(\frac{y}{2}\right)\right|+C$
36. $\ln\sqrt{\sec 2\alpha}+C$
37. $2\sqrt{\text{sen}^2\theta+1}+C$
38. $-\frac{1}{2}\cos(e^{2x})+C$
39. $-\frac{1}{2}\cos(\ln x^2)+C$
40. $\frac{2}{3}\ln\left|\sec\sqrt{x}+\tan\sqrt{x}\right|+C$

EJERCICIO 6

1. $\frac{1}{9}\text{arc tan}\left(\frac{x}{9}\right)+C$
2. $\frac{1}{b^2}\text{arc tan}\left(\frac{y}{b}\right)+C$
3. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{y-4}{y+4}\right|+C$
4. $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{5+2x}{5-2x}\right|+C$
5. $\frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-4}{\sqrt{2}x+4}\right|+C$
6. $\frac{1}{72}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+C$
7. $\frac{1}{3}\text{arc sen}\frac{3x}{5}+C$
8. $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-7}\right|+C$
9. $\frac{1}{3}\text{arc sec}\frac{2x}{3}+C$
10. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$
11. $\frac{4}{b^2m}\text{arc tan}\left(\frac{b^2x}{m}\right)+C$
12. $\frac{1}{2b^2}\ln\left|\frac{v^2-b^2}{v^2+b^2}\right|+C$
13. $\frac{1}{2}\text{arc tan}\left(\frac{\ln x}{2}\right)+C$
14. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\text{sen }x}{1-\text{sen }x}\right|+C$
15. $\frac{1}{2}\text{arc sen}\left(\frac{x^2}{3}\right)+C$
16. $\frac{5\sqrt{3}}{3}\text{arc sen}(x)+C$
17. $2\ln\left(\sqrt{e^x}+\sqrt{e^x+4}\right)+C$
18. $\frac{1}{2}\text{arc sen}\left(\frac{2\sqrt{5}y}{5}\right)+C$
19. $\frac{1}{10a^2}\ln\left|\frac{5+ay}{5-ay}\right|+C$
20. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}t+\sqrt{3t^2+5}\right|+C$
21. $\frac{\sqrt{10}}{20}\ln\left|\frac{\sqrt{10}y+5}{\sqrt{10}y-5}\right|+C$
22. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+4}\right|+C$
23. $\frac{1}{b^2}\text{arc tan}\frac{x}{b^2}+C$
24. $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc sen}\frac{\sqrt{2}y}{2}+C$
25. $\frac{e^{2x}}{4}\sqrt{16-e^{4x}}+4\text{ arc sen}\left(\frac{e^{2x}}{4}\right)+C$
26. $\frac{x}{2}\sqrt{1-2x^2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\text{arc sen}\sqrt{2}x+C$
27. $\sqrt{5}\text{ arc sen}\left(\frac{\sqrt{10}\,m}{20}\right)+C$
28. $\left(\frac{2x+1}{4}\right)\sqrt{4x^2+4x+1-a^2}-\frac{a^2}{4}\ln\left(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+1-a^2}\right)+C$
29. $\left(\frac{\sqrt{7}x^m}{2m}\right)\sqrt{49x^{2m}+4}+\left(\frac{2\sqrt{7}}{7m}\right)\ln\left(7x^m+\sqrt{49x^{2m}+4}\right)+C$
30. $\frac{\sqrt{14}}{14}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{14}\,t}{7}\right)+C$
31. $\left(\frac{3}{5}\right)\sqrt{5x^2-16}+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\ln\left(\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2-16}\right)+C$
32. $-\frac{\sqrt{5}}{20}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+\cos 2t}{\sqrt{5}-\cos 2t}\right)+C$
33. $-\text{arc tan}(\cos x)+C$
34. $\frac{t\ln(3t)}{2}\sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}+2\ln\left(t\ln(3t)+\sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}\right)+C$

EJERCICIO 7

1. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{x+6}\right|+C$
2. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x}{x+8}\right|+C$
3. $\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+C$
4. $\ln\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|+C$
5. $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+7}\right|+C$
6. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{2x+1}{x+4}\right|+C$
7. $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{ax+3}{ax+5}\right|+C$
8. $3\ln\left|\frac{e^x+4}{e^x+5}\right|+C$
9. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{2w-3}{w-5}\right|+C$
10. $\frac{1}{11}\ln\left|\frac{2\alpha-1}{\alpha-5}\right|+C$
11. $\frac{\sqrt{7}}{7}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{7}(x-1)}{7}\right)+C$
12. $x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+3}\right|+C$
13. $\frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{\text{sen }x-3-\sqrt{3}}{\text{sen }x-3+\sqrt{3}}\right|+C$
14. $\frac{\sqrt{5}}{5}\text{arc sen}\left(\frac{5w-11}{9}\right)+C$
15. $\frac{1}{2}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right|+C$
16. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|3z+2+\sqrt{9z^2+12z}\right|+C$
17. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|4x+1+2\sqrt{4x^2+2x}\right|+C$
18. $\ln\left|2\ln x+7+2\sqrt{\ln^2 x+7\ln x+6}\right|+C$
19. $\ln\left|2w-9+2\sqrt{w^2-9w+5}\right|+C$
20. $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x-3}-\frac{7}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-3}\right|+C$
21. $\frac{41\sqrt{2}}{32}\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{41}(4x+3)}{41}\right)+\left(\frac{4x+3}{8}\right)\sqrt{4-3x-2x^2}+C$

22. $\left(\frac{2x-3}{4}\right)\sqrt{3x-x^2}+\frac{9}{8}\text{arc sen}\left(\frac{2x-3}{3}\right)+C$

23. $\frac{(3x-2)\sqrt{3x^2-4x}}{6}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\ln\left|3x-2+\sqrt{9x^2-12x}\right|+C$

24. $\left(\frac{2x^2-1}{8}\right)\sqrt{x^4-x^2-20}-\frac{81}{16}\ln\left|2x^2-1+2\sqrt{x^4-x^2-20}\right|+C$

25. $\left(\frac{2x+5}{4}\right)\sqrt{24-5x-x^2}+\frac{121}{8}\text{arc sen}\left(\frac{2x+5}{11}\right)+C$

26. $\left(\frac{2x+3}{8}\right)\sqrt{x^2+3x+8}+\frac{23}{16}\ln\left|2x+3+2\sqrt{x^2+3x+8}\right|+C$

27. $2\ln\left|\sqrt{x}-2+\sqrt{x-4\sqrt{x}-21}\right|+C$

28. $\frac{1}{n}\left[\left(\frac{e^{nx}-1}{2}\right)\sqrt{3+2e^{nx}-e^{2nx}}+2\text{ arc sen}\left(\frac{e^{nx}-1}{2}\right)\right]+C$

29. $\ln\left|2y+1+2\sqrt{y^2+y+1}\right|+C$

30. $\left(\frac{3x+2}{6}\right)\sqrt{3x^2+4x+1}-\frac{\sqrt{3}}{18}\ln\left|\sqrt{3(3x^2+4x+1)}+3x+2\right|+C$

31. $\frac{\sqrt{2}}{2}\text{arc sen}\left(\frac{4w-5}{5}\right)+C$

32. $\frac{2\sqrt{a}}{a}\ln\left|2\sqrt{ax}+3+2\sqrt{ax+3\sqrt{ax}+2}\right|+C$

33. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}(6y+13)+6\sqrt{3y^2+13y-10}\right|+C$

34. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)^{11}}{(3x+1)^7}\right|+C$

35. $-\frac{1}{6}\ln|(3-x)^5(3+x)^{13}|+C$

36. $-\frac{1}{9}\ln|(3x+4)^5(3x-4)^2|+C$

37. $\ln\left|\frac{e^x(x-\sqrt{3}-2)^{\frac{6\sqrt{3}+7}{2}}}{(x+\sqrt{3}-2)^{\frac{6\sqrt{3}-7}{2}}}\right|+C$

38. $\frac{\sqrt{73}}{438}\ln\left|(6x+5+\sqrt{73})^{\sqrt{73}+17}(6x+5-\sqrt{73})^{\sqrt{73}-17}\right|+C$

39. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{(x-6)^{11}}{(x-1)^6}\right|+C$

40. $\frac{1}{3}\ln\left|x^2+9x-5\right|+\frac{4\sqrt{101}}{101}\ln\left|\frac{2x+9-\sqrt{101}}{2x+9+\sqrt{101}}\right|+C$

41. $3\sqrt{x^2-4}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$

42. $-\frac{11}{3}\text{arc sen}\frac{3x}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{4-9x^2}+C$

43. $\frac{5}{4}\ln\left|4x+\sqrt{16x^2+25}\right|-\frac{1}{8}\sqrt{16x^2+25}+C$

44. $\frac{3}{2}\sqrt{7-2x^2}+2\sqrt{2}\text{ arc sen}\left(\frac{\sqrt{14}x}{7}\right)+C$

45. $\frac{\sqrt{129}}{2580}\ln\left|\frac{(10x+\sqrt{129}-7)^{67-\sqrt{129}}}{(10x-\sqrt{129-7})^{67+\sqrt{129}}}\right|+C$

46. $5\sqrt{x^2+3x-5}-\frac{37}{2}\ln\left|2x+3+2\sqrt{x^2+3x-5}\right|+C$

47. $\frac{13\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{4x+5+\sqrt{8(2x^2+5x-1)}}{e^{\frac{2\sqrt{4x^2+10x-2}}{13}}}\right|+C$

48. $-5\sqrt{4-2x-x^2}-4\text{ arc sen}\frac{\sqrt{5}(x+1)}{5}+C$

49. $\frac{7}{2}\ln\left|\frac{e^{\frac{(4x^2-2)\sqrt{x^2-3x+4}}{21}}}{(2x-3+\sqrt{x^2-3x+4})^{-1}}\right|+C$

50. $\frac{175}{16}\ln\left|\frac{e^{\frac{(16x^2+84x-2)\sqrt{x^2+7x+6}}{175}}}{(2x+7+2\sqrt{x^2+7x+6})^{-1}}\right|+C$

CAPÍTULO 8

EJERCICIO 8

1. $\frac{1}{16}\text{sen}^4 4x+C$

2. $-\frac{1}{18}\cos^6 3x+C$

3. $\frac{1}{3a}\cos^3 ax-\frac{1}{a}\cos ax+C$

4. $\frac{1}{15}\cos^3 5x-\frac{1}{5}\cos 5x+C$

5. $\frac{4}{3}\cos^3\frac{x}{4}-4\cos\frac{x}{4}+C$

6. $\text{sen } x-\frac{\text{sen}^3 x}{3}+C$

7. $\frac{1}{a}\text{sen } ax-\frac{\text{sen}^3 ax}{3a}+C$

8. $\frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x - \frac{\operatorname{sen}^3 6x}{18} + C$

9. $3\operatorname{sen}\frac{x}{3} - \operatorname{sen}^3\frac{x}{3} + C$

10. $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

11. $-\frac{1}{a}\cos ax + \frac{2}{3a}\cos^3 ax - \frac{1}{5a}\cos^5 ax + C$

12. $-\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{6}\cos^3 4x - \frac{1}{20}\cos^5 4x + C$

13. $-2\cos\frac{x}{2} + \frac{4}{3}\cos^3\frac{x}{2} - \frac{2}{5}\cos^5\frac{x}{2} + C$

14. $\operatorname{sen} y - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 y + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 y + C$

15. $\frac{1}{b}\operatorname{sen} bx - \frac{2}{3b}\operatorname{sen}^3 bx + \frac{1}{5b}\operatorname{sen}^5 bx + C$

16. $3\operatorname{sen}\frac{x}{3} - 2\operatorname{sen}^3\frac{x}{3} + \frac{3}{5}\operatorname{sen}^5\frac{x}{3} + C$

17. $\frac{1}{7}\cos^7\theta - \frac{3}{5}\cos^5\theta + \cos^3\theta - \cos\theta + C$

18. $\frac{1}{21}\cos^7 3x - \frac{1}{5}\cos^5 3x + \frac{1}{3}\cos^3 3x - \frac{1}{3}\cos 3x + C$

19. $-\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 y + \frac{3}{5}\operatorname{sen}^5 y - \operatorname{sen}^3 y + \operatorname{sen} y + C$

20. $-\frac{1}{28}\operatorname{sen}^7 4x + \frac{3}{20}\operatorname{sen}^5 4x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 4x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + C$

21. $-\frac{1}{24}\cos^6 4x + \frac{1}{32}\cos^8 4x + C$

22. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^8 x + C$

23. $\sqrt{\operatorname{sen} 2x}\left(1 - \frac{2\operatorname{sen}^2 2x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^4 2x}{9}\right) + C$

EJERCICIO 9

1. $\frac{1}{10}\tan^2 5x + \frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + C$

2. $\tan^2\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C$

3. $-\frac{1}{8}\cot^2 4x - \frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen} 4x| + C$

4. $-\frac{3}{2}\cot^2\frac{x}{3} - 3\ln\left|\operatorname{sen}\frac{x}{3}\right| + C$

5. $-\frac{1}{6}\left(\frac{\cot^4 6x}{4} - \frac{\cot^2 6x}{2} - \ln|\operatorname{sen} 6x|\right) + C$

6. $-4\left(\frac{1}{4}\cot^4\frac{y}{4} - \frac{1}{2}\cot^2\frac{y}{4} - \ln\left|\operatorname{sen}\frac{y}{4}\right|\right) + C$

7. $\frac{1}{20}\tan^4 5x - \frac{1}{10}\tan^2 5x + \frac{1}{5}\ln|\sec 5x| + C$

8. $-\frac{1}{15}\cot^3 5x + \frac{1}{5}\cot 5x + x + C$

9. $\frac{1}{18}\tan^3 6x - \frac{1}{6}\tan 6x + x + C$

10. $\frac{1}{6}\tan^2 3x + \frac{1}{6}\cot^2 3x + \frac{4}{3}\ln|\operatorname{sen} 3x| + \frac{4}{3}\ln|\cos 3x| + C =$

$\frac{1}{6}\tan^2 3x + \frac{1}{6}\cot^2 3x + \frac{4}{3}\ln|\operatorname{sen} 6x| + C$

11. $\frac{1}{6}\tan^3 2y + C$

12. $-\frac{1}{9}\cot^3 3y + C$

EJERCICIO 10

1. $\frac{1}{3}\tan 3x + \frac{1}{9}\tan^3 3x + C$

2. $\frac{1}{a}\tan ax + \frac{1}{3a}\tan^3 ax + C$

3. $6\tan\frac{x}{6} + 2\tan^3\frac{x}{6} + C$

4. $-\frac{1}{9}\cot 9x - \frac{1}{27}\cot^3 9x + C$

5. $-\frac{1}{b}\cot bx - \frac{1}{3b}\cot^3 bx + C$

6. $-7\cot\frac{x}{7} - \frac{7}{3}\cot^3\frac{x}{7} + C$

7. $\frac{3}{2}\tan\frac{2x}{3} + \frac{1}{2}\tan^3\frac{2x}{3} + C$

8. $-\frac{4}{5}\cot\frac{5x}{4} - \frac{4}{15}\cot^3\frac{5x}{4} + C$

9. $\frac{1}{24}\tan^3 8x + \frac{1}{40}\tan^5 8x + C$

10. $\frac{1}{3a}\tan^3 ax + \frac{1}{5a}\tan^5 ax + C$

11. $\frac{7}{3}\tan^3\frac{x}{7} + \frac{7}{5}\tan^5\frac{x}{7} + C$

12. $\frac{1}{5}\tan^3\frac{5x}{3} + \frac{3}{25}\tan^5\frac{5x}{3} + C$

13. $\frac{1}{25}\sec^5 5x - \frac{1}{15}\sec^3 5x + C$

14. $\frac{1}{5b}\sec^5 bx - \frac{1}{3b}\sec^3 bx + C$

15. $\frac{6}{5}\sec^5 \frac{x}{6} - 2\sec^3 \frac{x}{6} + C$

16. $\frac{7}{20}\sec^5 \frac{4x}{7} - \frac{7}{12}\sec^3 \frac{4x}{7} + C$

17. $-\frac{1}{5b}\csc^5 bx + \frac{1}{3b}\csc^3 bx + C$

18. $-\frac{1}{20}\csc^5 4x + \frac{1}{12}\csc^3 4x + C$

19. $2\tan\frac{x}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\tan^2\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\tan^4\frac{x}{2}\right) + C$

20. $-\frac{2}{3}\left[\cot\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{1}{3}\cot^3\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + C$

21. $\frac{2}{3}\left(\tan x^3 + \frac{1}{3}\tan^3 x^3\right) + C$

22. $\tan x\left(1 + \frac{2}{3}\tan^2 x + \frac{1}{5}\tan^4 x\right) + C$

23. $\tan\alpha - \frac{1}{5}\tan^5\alpha + C$

24. $\frac{1}{2}\tan 2t + \frac{1}{6}\tan^3 2t + C$

25. $-\frac{1}{3}\cot(3x-1) - \frac{1}{9}\cot^3(3x-1) + C$

26. $\frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{2}{3}\sec^3 x + \sec x + C$

27. $\frac{1}{6}\sec^3 2x + C$

28. $-\frac{1}{7}\csc^7 x + \frac{2}{5}\csc^5 x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$

29. $\frac{1}{21}\sec^7 3x - \frac{2}{15}\sec^5 3x + \frac{1}{9}\sec^3 3x + C$

30. $2\sqrt{\tan x}\left(\frac{1}{9}\tan^4 x + \frac{2}{5}\tan^2 x + 1\right) + C$

31. $\frac{1}{3}\tan 3t + 2\cot\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{9}\tan^3 3t + \frac{2}{3}\cot^3\left(\frac{t}{2}\right) + C$

32. $-\frac{1}{2}\cot(2x-1) - \frac{1}{6}\cot^3(2x-1) + C$

33. $-\cot\left(\frac{\theta}{5}\right)\cdot\left[5 + \frac{10}{3}\cot^2\left(\frac{\theta}{5}\right) + \cot^4\left(\frac{\theta}{5}\right)\right] + C$

34. $-\cot x\left(\frac{1}{7}\cot^6 x + \frac{3}{5}\cot^4 x + \cot^2 x + 1\right) + C$

35. $\frac{1}{2}\tan x^2 - \frac{1}{6}\tan^3 x^2 + C$

EJERCICIO 11

1. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + C$

2. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax + C$

3. $\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\operatorname{sen}\frac{2}{5}x + C$

4. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3}{2}x + C$

5. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{20}\operatorname{sen} 10x + C$

6. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4b}\operatorname{sen} 2bx + C$

7. $\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\operatorname{sen}\frac{2}{7}x + C$

8. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{14}\operatorname{sen} 7x + C$

9. $\frac{3}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 16x + \frac{1}{256}\operatorname{sen} 32x + C$

10. $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax + \frac{1}{32a}\operatorname{sen} 4ax + C$

11. $\frac{3}{8}x - \frac{7}{4}\operatorname{sen}\frac{2}{7}x + \frac{7}{32}\operatorname{sen}\frac{4}{7}x + C$

12. $\frac{3}{8}x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3}{2}x + \frac{1}{24}\operatorname{sen} 3x + C$

13. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{36}\operatorname{sen} 18x + \frac{1}{288}\operatorname{sen} 36x + C$

14. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4b}\operatorname{sen} 2bx + \frac{1}{32b}\operatorname{sen} 4bx + C$

15. $\frac{3}{8}x + \frac{3}{4}\operatorname{sen}\frac{2}{3}x + \frac{3}{32}\operatorname{sen}\frac{4}{3}x + C$

16. $\frac{3}{8}x + \frac{3}{20}\operatorname{sen}\frac{10}{3}x + \frac{3}{160}\operatorname{sen}\frac{20}{3}x + C$

17. $\frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C$

18. $\frac{5}{16}x - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 8x + \frac{3}{256}\operatorname{sen} 16x + \frac{1}{192}\operatorname{sen}^3 8x + C$

19. $\frac{5}{16}x - \frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax + \frac{3}{64a}\operatorname{sen} 4ax + \frac{1}{48a}\operatorname{sen}^3 2ax + C$

20. $\frac{5}{16}x - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x + \frac{3}{16}\operatorname{sen} x + \frac{1}{12}\operatorname{sen}^3\frac{1}{2}x + C$

21. $\frac{5}{16}x - \frac{1}{10}\operatorname{sen} 5x + \frac{3}{160}\operatorname{sen} 10x + \frac{1}{120}\operatorname{sen}^3 5x + C$

22. $\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{64}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C$

23. $\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + \frac{1}{64}\operatorname{sen} 12x - \frac{1}{144}\operatorname{sen}^3 6x + C$

24. $\frac{5}{16}x + \frac{1}{4b}\operatorname{sen} 2bx + \frac{3}{64b}\operatorname{sen} 4bx - \frac{1}{48b}\operatorname{sen}^3 2bx + C$

25. $\frac{5}{16}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{3}{32}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^3 x + C$

26. $\frac{5}{16}x + \frac{5}{8}\operatorname{sen}\frac{4}{5}x + \frac{15}{128}\operatorname{sen}\frac{8}{5}x - \frac{5}{96}\operatorname{sen}^3\frac{4}{5}x + C$

27. $\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{64}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C$

28. $\frac{3}{8}x - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + \frac{1}{96}\operatorname{sen} 12x + C$

29. $\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2y + C = \frac{3}{8}y - \frac{1}{2}\operatorname{sen} y + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2y + C$

30. $\frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + C$

31. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + \frac{1}{96}\operatorname{sen} 12x + C$

32. $x + \operatorname{sen} x + C$

33. $\frac{19}{2}\alpha - 6\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\alpha + C$

34. $\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2x - 4\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

35. $\frac{x}{8} - \frac{b}{32}\operatorname{sen}\left(\frac{4x}{b}\right) + C$

36. $\frac{\theta}{2} - \frac{3}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{2\theta}{3}\right) + 4\cos^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\theta}{3}\right) + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right) + C$

37. $\frac{35}{128}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{7}{128}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^3 2x + \frac{1}{1024}\operatorname{sen} 8x + C$

EJERCICIO 12

1. $\frac{1}{10}[5\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 5x] + C = \frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 5x}{10} + C$

2. $-\frac{1}{8}[\cos 4x - 2\cos 2x] + C = -\frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{4} + C$

3. $\frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + C$

4. $\frac{1}{20}\operatorname{sen} 10y + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4y + C$

5. $-\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C$

6. $-\frac{3}{7}\cos\left(\frac{7\alpha}{6}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{6}\right) + C$

7. $\frac{10}{17}\operatorname{sen}\left(\frac{17}{20}w\right) + \frac{10}{7}\operatorname{sen}\left(\frac{7}{20}w\right) + C$

8. $\frac{x\cos 2b}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2mx}{4m} + C$

9. $\frac{x\cos 8}{2} - \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} + C$

10. $\frac{1}{24}\cos 6w - \frac{1}{16}\cos 4w - \frac{1}{8}\cos 2w + C$

CAPÍTULO 9

EJERCICIO 13

1. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+36}-6}{x}\right| + C$

2. $\frac{w}{5\sqrt{w^2+5}} + C$

3. $-\frac{y}{\sqrt{y^2+3}} + \ln\left(\sqrt{y^2+3} + y\right) + C$

4. $8\operatorname{arc sen}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + C$

5. $-\frac{\sqrt{y^2+25}}{25y} + C$

6. $-\frac{\sqrt{(36-25x^2)^5}}{180x^5} + C$

7. $6\operatorname{arc sen}\left(\frac{\alpha-2}{2}\right) - \frac{(\alpha+6)\sqrt{4\alpha-\alpha^2}}{2} + C$

8. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{25x^2+16}-4}{5x}\right| + C$

9. $\frac{(x^2+32)\sqrt{x^2-16}}{3} + C$

10. $-\frac{\sqrt{5-\theta^2}}{\theta} - \operatorname{arc sen}\left(\frac{\sqrt{5}\,\theta}{5}\right) + C$

11. $\sqrt{x^2+16} + 4\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x}\right| + C$

12. $-\dfrac{\sqrt{7-x^2}}{7x}+C$

13. $\dfrac{y}{\sqrt{9-y^2}}-\text{arc sen}\dfrac{y}{3}+C$

14. $\dfrac{1}{5}(3-y^2)^{\frac{5}{2}}-(3-y^2)^{\frac{3}{2}}+C$

15. $\dfrac{27}{2}\text{arc sen}\dfrac{x-3}{3}-\dfrac{(x+9)\sqrt{6x-x^2}}{2}+C$

16. $\dfrac{(w^2-14)\sqrt{w^2+7}}{3}+C$

17. $\dfrac{27}{8}\text{arc sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}\,x}{3}\right)-\left(\dfrac{2x^3+9x}{8}\right)\sqrt{3-x^2}+C$

18. $\dfrac{\sqrt{11}}{242}\text{arc tan}\left(\dfrac{\sqrt{11x^2-121}}{11}\right)+\dfrac{\sqrt{x^2-11}}{22x^2}+C$

19. $\dfrac{(3x^2-8)(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}{15}+C$

20. $2\ \text{arc sen}\left[\dfrac{\sqrt{2}(\ln w-2)}{4}\right]-\sqrt{4+4\ln w-\ln^2 w}+C$

EJERCICIO 14

1. $\dfrac{1}{3}e^{3x}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+C$

2. $\dfrac{1}{a}e^{ax}\left(x-\dfrac{1}{a}\right)+C$

3. $3e^{\frac{x}{3}}(x-3)+C$

4. $-\dfrac{x}{5}\cos 5x+\dfrac{1}{25}\text{sen}\ 5x+C$

5. $-\dfrac{x}{a}\cos ax+\dfrac{1}{a^2}\text{sen}\ ax+C$

6. $-4x\cos\dfrac{x}{4}+16\ \text{sen}\dfrac{x}{4}+C$

7. $\dfrac{x}{4}\text{sen}\ 4x+\dfrac{1}{16}\cos 4x+C$

8. $\dfrac{x}{b}\text{sen}\ bx+\dfrac{1}{b^2}\cos bx+C$

9. $3x\ \text{sen}\dfrac{x}{3}+9\cos\dfrac{x}{3}+C$

10. $\dfrac{x^3}{3}\left(\ln|x|-\dfrac{1}{3}\right)+C$

11. $x^2(\ln x^2-1)+C$

12. $\dfrac{x^6}{6}\left(\ln|x|-\dfrac{1}{6}\right)+C$

13. $\dfrac{x^5}{5}\left(\ln|5x|-\dfrac{1}{5}\right)+C$

14. $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\dfrac{1}{n+1}\right)+C$

15. $e^x(x^2-2x+2)+C$

16. $\dfrac{e^{3y}}{3}\left(y^2-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{2}{9}\right)+C$

17. $\dfrac{e^{4x}}{4}\left(x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{8}x-\dfrac{3}{32}\right)+C$

18. $-\dfrac{x^2}{3}\cos 3x+\dfrac{2}{27}\cos 3x+\dfrac{2}{9}x\ \text{sen}\ 3x+C$

19. $-\dfrac{x^2}{b}\cos bx+\dfrac{2}{b^3}\cos bx+\dfrac{2}{b^2}x\ \text{sen}\ bx+C$

20. $2x^3\text{sen}\dfrac{x}{2}+12x^2\cos\dfrac{x}{2}-96\cos\dfrac{x}{2}-48x\ \text{sen}\dfrac{x}{2}+C$

21. $-\dfrac{1}{a}x\cot ax+\dfrac{1}{a^2}\ln|\text{sen}\ ax|+C$

22. $\dfrac{1}{m}y\tan my-\dfrac{1}{m^2}\ln|\sec my|+C$

23. $x\ \text{arc cos}\ ax-\dfrac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2}+C$

24. $x\ \text{arc sen}\ bx+\dfrac{1}{b}\sqrt{1-b^2x^2}+C$

25. $x\ \text{arc tan}\ ax-\dfrac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2)+C$

26. $x\ \text{arc sen}\ mx-\dfrac{1}{m}\ln\left|mx+\sqrt{m^2x^2-1}\right|+C$

27. $x\ \text{arc cot}\dfrac{x}{n}+\dfrac{n}{2}\ln\left|n^2+x^2\right|+C$

28. $\dfrac{1}{4}e^{2\theta}(\text{sen}\ 2\theta-\cos 2\theta)+C$

29. $\dfrac{1}{25}e^{3x}(4\ \text{sen}\ 4x+3\cos 4x)+C$

30. $\dfrac{2(5t-6)\sqrt{5t+3}}{75}+C$

31. $-\dfrac{(3ax+b)}{6a^2(ax+b)^3}+C$

32. $-\dfrac{24x^2+8x+1}{96(2x+1)^4}+C$

33. $\ln y[\ln(\ln|y|)-1]+C$

34. $-\dfrac{3}{8}(2x^2-2x+1)e^{2x}+\dfrac{1}{2}x^3e^{2x}+C$

35. $2\sqrt{x}\text{ arc cos}\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} + C$

36. $\frac{2}{5}e^{2x}\cos x + \frac{1}{5}e^{2x}\text{sen } x + C$

37. $y(\text{arc cos } y)^2 - 2(\text{arc cos } y)\sqrt{1-y^2} - 2y + C$

38. $-\frac{\text{arc cos } x}{x} - \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$

39. $-\frac{1}{2}w\sqrt{16-w^2} + 8\text{ arc sen}\left(\frac{w}{4}\right) + C$

40. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x\cos 2(\ln x) - \frac{1}{5}x\text{ sen } 2(\ln x) + C =$

$\frac{2}{5}x\cos(\ln x^2) + x\text{ sen}^2(\ln|x|) - \frac{1}{5}x\text{ sen}(\ln x^2) + C$

EJERCICIO 15

1. $\ln\frac{x^2(x+2)}{(x+1)^3} + C$

2. $\ln\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}(2x-1)^{\frac{1}{2}}}{x} + C$

3. $\ln\frac{(x-3)^4(x-2)^2}{x^5} + C$

4. $\ln\frac{(x-2)^3}{x^3(x+2)^2} + C$

5. $\ln\frac{x(x+3)}{(x-3)^2} + C$

6. $\ln x^2(x-1)(x+2)^4 + C$

7. $\ln x^5(2x-1)^2(x-3) + C$

8. $\ln\frac{(2x+3)^{\frac{5}{2}}}{(x+2)^3} - \frac{2}{x+2} + C$

9. $\ln(x-2)^2 - \frac{3}{(x-2)} - \frac{1}{(x-2)^2} + C$

10. $\ln(x-3)^2 - \frac{2}{(x-3)} - \frac{1}{(x-3)^2} + C$

11. $\ln\frac{(x+1)^2}{x} - \frac{1}{x+1} + C$

12. $\frac{1}{m-n}\ln\left|\frac{y-m}{y-n}\right| + C$

13. $w - 5\ln\left|\frac{w-4}{w-5}\right| + C$

14. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(y-3)(y-1)}{(y-2)^2}\right| + C$

15. $\frac{4}{x-3} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x-3}\right| + C$

16. $3\ln\left|\frac{\sqrt{w^2-1}}{w}\right| + C$

17. $\frac{1}{2}\ln\left|(x-2)^6(2x+1)^5\right| + C$

18. $\frac{1}{4}\ln[(w-6)^3(w+6)] - \frac{3}{w-6} + C$

19. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(4x-1)^3}{3x-1}\right| + C$

20. $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{1}{(x+4)^3(3x+2)^{\frac{1}{3}}}\right| - \frac{2}{x+4} + C$

21. $-5\ln\left|\frac{(x-3)^2}{(x-5)^3}\right| + C$

22. $\frac{x^3}{6} + \frac{27}{16}x^2 + \frac{211}{32}x + \frac{595}{128}\ln|4x-1| + C$

23. $\frac{1}{32}\ln\left|\frac{x^2}{16-x^2}\right| + C$

24. $\frac{1}{30}\ln\left[\frac{x^{25}(2-x)^9}{(x+3)^{34}}\right] + C$

25. $\frac{1}{1-m} + \ln|1-m| + C$

26. $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{y-5}{y+5}\right| - \frac{1}{2(y+5)} + C$

27. $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{x}{x+6}\right| - \frac{2}{3(x+6)} + C$

28. $\frac{1}{8}\ln|2x-1| - \frac{8x+1}{16(2x-1)^2} + C$

29. $\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{60x^2-105x+49}{6(x-1)^3} + 10\ln|x-1| + C$

30. $\ln\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2x^2-18} + C$

31. $\frac{1}{8x^2} + \frac{1}{4x} + \frac{7}{8(x-2)} + \frac{3}{16}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\right] + C$

EJERCICIO 16

1. $\ln\left|\frac{m+1}{m}\right| - \frac{1}{m} + C$

2. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{m^2}{m^2+1}\right| + C$

3. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^4}{(x^2-6)^{11}}\right| + C$

4. $2x + \frac{1}{3}\text{arc tan}\left(\frac{x}{3}\right) + \ln\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\right) - \frac{1}{2\left(x^2+9\right)} + C$

5. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| - \frac{1}{2}\text{arc tan}\left(\frac{y}{2}\right) + C$

6. $\frac{x^2}{2} + x - 4\ln\left|x^2+9\right| - \frac{8}{3}\text{arc tan}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

7. $2\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + 2\,\text{arc tan}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

8. $\frac{1}{2}\ln\left|\,y^2+1\,\right| - \frac{2}{y^2+1} + C$

9. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-2)^6(x+2)^2(x+1)^3}{(x-1)^5}\right| + C$

10. $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4}\right| - \frac{\sqrt{3}}{12}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{3}(x+1)}{3}\right) + C$

11. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+y^2}{1-y^2}\right| - \frac{y^2}{2} + C$

12. $2\ln|x| + \frac{5\sqrt{2}}{2}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right) + C$

13. $\ln\left|(x^2+1)(x-1)^3\right| - \frac{1+2x}{2(x^2+1)} + C$

14. $\frac{9\sqrt{2}}{16}\ln\left(\frac{x+1-\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{3x+1}{x^2+2x-1}\right) + C$

15. $\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right| + \frac{3}{4(x-2)} + \frac{1}{4(x-4)} + C$

16. $\frac{1}{32}\ln\left|\frac{(x+2)^2}{x^2+2x+4}\right| + \frac{5\sqrt{3}}{144}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{3}\left(x+1\right)}{3}\right) + \frac{x+4}{24(x^2+2x+4)} + C$

17. $\frac{x-8}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16}\text{arc tan}\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\left|\,\sqrt{x^2+4}\,(x+1)^3\right| + C$

18. $\frac{1}{2}\ln\left|x^4(x^2+5)\right| + \frac{\sqrt{5}}{5}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{5}\,x}{5}\right) + \frac{3}{2(x^2+5)} + C$

19. $-\frac{(3x^2+10)}{50x(x^2+5)} + \frac{3\sqrt{5}}{250}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{5}\,x}{5}\right) + C$

20. No se incluye solución por ser demostración.

EJERCICIO 17

1. $\frac{9}{2}\left[x^{\frac{2}{3}} - \ln\left|\,x^{\frac{2}{3}}+1\,\right|\,\right] + C$

2. $\frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} - \frac{5}{3}\ln\left|x^{\frac{3}{5}}+1\right| + C$

3. $\frac{(3x+1)^{\frac{5}{3}}}{15} - \frac{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}{6} + C$

4. $\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}\left[\frac{1}{5}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right) + 1\right] + C$

5. $6\left(x^{\frac{1}{6}} - \text{arc tan}\,x^{\frac{1}{6}}\right) + C$

6. $x^{\frac{5}{6}}\sqrt{x^{\frac{1}{3}}+4} - 5x^{\frac{1}{6}}\left(x^{\frac{1}{3}}-6\right)\sqrt{x^{\frac{1}{3}}+4} - 120\ln\left|x^{\frac{1}{6}} + \sqrt{x^{\frac{1}{3}}+4}\right| + C$

7. $2\sqrt{x} + 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}}-1\right| + C$

8. $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 18x^{\frac{1}{6}} + \ln\left|\frac{ce^{\frac{66\sqrt{7}}{7}\text{arc tan}\frac{2x^{\frac{1}{6}}-1}{\sqrt{7}}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}} + 2\right)^3}\right| + C$

9. $2x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+4\right) + 14\ln\left|x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}} - 3\right| + 13\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{4}}-3}{x^{\frac{1}{4}}+1}\right| + C$

10. $\frac{3}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{3}{10}x^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8}x^{\frac{1}{6}} + \frac{3\sqrt{2}}{16}\text{arc tan}\sqrt{2}x^{\frac{1}{6}} + C$

11. $4\sqrt{x} - 2\sqrt{5}\,\text{arc tan}\frac{\sqrt{5}\sqrt{x}}{5} + C$

12. $2(x-3)^{\frac{1}{2}} - 4(x-3)^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|(x-3)^{\frac{1}{4}}+1\right| + C$

13. $2\sqrt{t+2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{t+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{t+2}+\sqrt{2}}\right| + C$

14 a 15. No se incluye solución por ser demostraciones.

EJERCICIO 18

1. $-\frac{4+3y^2}{3\sqrt{(2+y^2)^3}} + C$

2. $-\frac{1}{375}(15x^2+14)(7-5x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

3. $\frac{4}{9}\left[\frac{x^3+36}{\sqrt[4]{90+x^3}}\right] + C$

4. $\frac{3}{1280}(20x^2-9)(3+4x^2)^{\frac{5}{3}}+C$

5. $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|+C$

6. $2\ln\left|\left(\frac{\sqrt{4+3x^4}-2}{\sqrt{4+3x^4}+2}\right)e^{\frac{\sqrt{4+3x^4}(16+3x^4)}{12}}\right|+C$

7. $\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^5+16}-2}{\sqrt[4]{x^5+16}+2}\right|+\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt[4]{x^5+16}}{2}\right)\right]+C$

8. $-\frac{(4-x^4)^{\frac{1}{4}}}{4x}+C$

9. $(3+x)^{\frac{8}{3}}\left[\frac{3}{14}(3+x)^2-\frac{18}{11}(3+x)+\frac{27}{8}\right]+C$

EJERCICIO 19

1. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\tan\frac{\theta}{2}}{3-\tan\frac{\theta}{2}}\right|+C$

2. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}-\tan\frac{\theta}{2}}\right|+C$

3. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha+8}\right|+C$

4. $\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+1}\right|+C$

5. $-\frac{2\left[3\tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+3\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)+2\right]}{\left[\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)+1\right]^3}+C$

6. $\ln\left|\frac{1}{1-\cot\frac{w}{2}}\right|+C$

7. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}+1}{1-2\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}}\right|+\frac{\theta}{2}+C$

8. $\frac{\sqrt{10}}{10}\ln\left|\frac{3-\sqrt{10}+\tan\frac{\theta}{2}}{3+\sqrt{10}+\tan\frac{\theta}{2}}\right|+C$

9. $\frac{1}{2}\ln\left|1+2\tan\theta\right|+C$

10. $\frac{8}{15}\sqrt{15}\,\text{arc tan}\left[\frac{\sqrt{15}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{3}\right]-\theta+C$

11. $\frac{2\sqrt{11}}{11}\text{arc tan}\left[\frac{\sqrt{11}\left(2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)-3\right)}{11}\right]+C$

12. $\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{5}\text{arc tan}\left(\frac{\sqrt{5}\tan\frac{x}{2}}{5}\right)+C$

13. $\ln\left|\left[\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]\cdot\left[\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)+\sqrt{2}-1\right]\cdot\left[\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)-\sqrt{2}-1\right]\right|+C$

14. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+1}\right|+\frac{\theta}{2}+C$

15. $\ln\left|\frac{\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+3\right]\left[3\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right]}{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right|+C$

16. $\frac{\sqrt{21}}{21}\ln\left|\frac{2\tan w-\sqrt{21}-5}{2\tan w+\sqrt{21}-5}\right|+C$

CAPÍTULO 10

EJERCICIO 20

1. $2y=x^2+6x-8$
2. $f(x)=\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2$
3. $y=e^x(x-1)-e^3$
4. $x\left(y+3\,\text{arc sen}\frac{3x}{2a}-3\pi\right)+\sqrt{4a^2-9x^2}=0$
5. $x=y^3-2y^2-2$
6. $x=\frac{3}{2-y}-\ln(2-y)(y+1)^2-3$

7. $y = \frac{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{62}{3}$

8. $16x = 28 - 3\pi + 6y - 8 \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} 2y$

9. $y = \frac{4+3x}{2-x}$

10. $y = 4e^{2(x - \arctan x)}$

11. $x^3 + 3 \cot y - 3 = 0$

12. $s(t) = 11t - 15$

13. $60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

14. $10\frac{2}{3}$ m

15. $T = 64° - 2t^2$

16. 176.4 m

17. 75.776 m; $39.36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

EJERCICIO 21

1. $-\frac{4}{3}$
2. 20
3. $\frac{88}{3}$
4. 6
5. $-\frac{1}{2}$
6. 6
7. $-\ln\sqrt[4]{7}$
8. $\ln 2 - \frac{1}{2}$
9. $\sqrt{2}$
10. $\ln\sqrt{\frac{8}{5}}$
11. $\frac{2}{e}\left(e^{\frac{5}{2}} - 1\right)$
12. $4e^5$
13. $-\frac{1}{4}$
14. $\ln\left(\frac{8}{5}\right)$
15. $\frac{\pi}{3}$
16. sen(2) − sen(1)
17. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
18. ln(432)
19. $\frac{\pi+2}{8}$
20. $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \ln(2)\right)$

EJERCICIO 22

1. 18u^2
2. 9u^2
3. $\frac{609}{4}\text{u}^2$
4. 18u^2
5. $\frac{32}{3}\text{u}^2$
6. 9u^2
7. $\frac{16}{3}\text{u}^2$
8. 18u^2
9. 1u^2
10. $\frac{16}{3}\text{u}^2$
11. 6u^2
12. $\frac{14}{3}\text{u}^2$
13. 8u^2
14. 36u^2
15. $\ln(16) = 2.77\text{u}^2$
16. $\frac{1}{2}\text{u}^2$
17. $\frac{8}{a}\text{u}^2$ con $a \neq 0$
18. $(2 - \ln 3)\text{u}^2 = 0.901\text{u}^2$
19. 9u^2
20. 1.388u^2
21. $(\ln 256 - 3)\text{u}^2 = 2.54\text{u}^2$
22. $\frac{\pi}{12} = 0.261\text{u}^2$
23. $2(3 - \sqrt{5})\text{u}^2$
24. 6u^2
25. $\frac{1}{2}(e-1) = 0.859\text{u}^2$
26. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = 0.684\text{u}^2$
27. $2\pi\text{u}^2$
28. $\frac{\pi^2 - 8}{4} = 0.467\text{u}^2$
29. $\ln\left(\frac{147}{25}\right) = 1.77\text{u}^2$
30. $\ln\left(\frac{16}{3}\right) = 1.673\text{u}^2$
31. $(3e^{-2} - 1)\text{u}^2$
32. $\left(2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = 2.405\text{u}^2$
33. $3(e^2 - e)\text{u}^2$
34. $(ab\pi)\text{u}^2$

EJERCICIO 23

1. 8.72u^2
2. 10u^2
3. 0.836u^2
4. 2.413u^2
5. 1.519u^2
6. 2.6439u^2
7. 685.0499u^2

EJERCICIO 24

1. 1.139u^2
2. 14.226u^2
3. 3.5226u^2
4. 3.2069u^2
5. 1.2499u^2

EJERCICIO 25

1. $\frac{9}{2}u^2$
2. $\frac{5}{12}u^2$
3. $\frac{8}{3}u^2$
4. $9u^2$
5. $\frac{103}{18}u^2$
6. $3\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)u^2$
7. $21.849u^2$
8. $13.33u^2$
9. $(8\pi - 16)u^2$
10. $\left[\frac{11}{4}-6\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]u^2$
11. $1.94u^2$
12. $\frac{4}{3}(3\pi-2)u^2$
13. $32u^2$

EJERCICIO 26

1. $8\pi u^3$
2. $\frac{81}{2}\pi u^3$
3. $\frac{243}{5}\pi u^3$
4. $\frac{32}{5}\pi u^3$
5. $\frac{96}{5}\pi u^3$
6. $128\pi u^3$
7. $8\pi u^3$
8. $\frac{512}{15}\pi u^3$
9. $\frac{28}{3}\pi u^3$
10. $\frac{51}{8}\pi u^3$
11. $60\pi u^3$
12. $\frac{3}{10}\pi u^3$
13. $\frac{3}{10}\pi u^3$
14. $\frac{384}{5}\pi u^3$
15. $\frac{108}{5}\pi u^3$
16. $\frac{81}{5}\pi u^3$
17. $6\pi^2 u^3$
18. $90\pi u^3$
19. $128\pi^2 u^3$
20. $4\pi^2 u^3$

EJERCICIO 27

1. 7.6337u
2. 1.4789u
3. 4.66u
4. 4.1493u
5. 4u
6. $\ln\left|\sqrt{2}+1\right| \approx .8813u$
7. $-\ln\left|2-\sqrt{3}\right| \approx 1.3169u$
8. 5.2563u
9. 1.2027u
10. $\frac{393}{20}$ u

EJERCICIO 28

1. *a*) $C(x) = 4 + 20x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$
   b) \$49.83
2. $I(x) = x^3 - x^2 + 5x$
3. *a*) $C(x) = 800(1.00501)^x + 200$
   b) \$9945.99
4. $\begin{cases} I(x) = 4x^3 - 18x^2 + 35x \\ p(x) = 4x^2 - 18x + 35 \end{cases}$
5. *a*) $C(x) = 5\sqrt{2x+1} + 8$
   b) \$113.00
6. *a*) $P(t) = \frac{2720}{3t+2}$
   b) \$160.00
7. \$64.00

CAPÍTULO 11

EJERCICIO 29

1. $3x^4 - 4y^3 = C$
2. $(1 - x^3)^2 = Ce^{-y^2}$
3. $y^3 - 6x^3 + 15y = C$
4. $\frac{(x-2)(y+2)}{(x+2)(y-2)} = C$, o $\frac{(x+2)(y-2)}{(x-2)(y+2)} = C$
5. $x(9 + y^2)^2 = C$
6. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = C - \ln[(y - 2)(x - 2)]^8$
7. $\sqrt{x^2-2} + \sqrt{y^2-2} = C$
8. $2 - 3e^{3y} = Ce^{-9x}$
9. $\tan y - \operatorname{sen} x \cdot \cos x = C$
10. $\frac{1}{\operatorname{sen}(x+y)} - \cot(x + y) = x + C$
11. $\left(\frac{x}{x-6}\right)^2\left(\frac{y-4}{y}\right)^3 = C$

12. $4x^4 - y^4 = C$
13. $y^4 + 4y = 4x^2 + 4x + C$
14. $y = Ce^{e^x}$
15. $x^3y^2 = C$
16. $3y + 12 \ln y = x^3 - 3x + C$
17. $\sqrt{\csc 2y - \cot 2y} = Ce^{\frac{x^3}{3}}$
18. $2e^{3y} - 3e^{2x} = C$
19. $x = e^{\frac{c}{y}}$
20. $e^y(y - 1) + \ln(e^{-x} + 1) = C$

EJERCICIO 30

1. $Cx^2 - 2x - y = 0$
2. $y = \dfrac{2Cx^3}{1 - Cx^2}$
3. $Cx^4 - 2x^2 - y^2 = 0$
4. $y = \dfrac{x - Cx^{-\frac{1}{2}}}{3}$
5. $Cx^4 + 3x^2 - y^2 = 0$
6. $y = e^{\frac{2Cy^2 - x^2}{2y^2}}$
7. $\ln x - \dfrac{x}{y - 2x} = C$
8. $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\, x \tan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} \ln Cy\right) + \dfrac{x}{2}$
9. $y = x \tan\left(\ln C(y^2 + x^2)^4\right)$
10. $x^4 = Ce^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}$
11. $y^2 - 2xy + 2x^2 = C$
12. $y = Cx^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$
13. $y^2 + 2xy - x^2 = C$
14. $\ln|x| + e^{-\frac{y}{x}} = C$
15. $x^2 - y^2 = C$
16. $x + 2y + 3 \ln|x + y - 2| + C$
17. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$
18. $x + 3y + 2 \ln(2 - x - y) = C$
19. $(4y - x - 3)(y + 2x - 3)^2 = C$

Anexo A: Logaritmos, Progresiones y Matrices

CAPÍTULO 1

LOGARITMOS

Reseña HISTÓRICA

John Napier

El término logaritmo lo acuñó el matemático escocés John Napier, a partir de los términos griegos *lógos* (razón) y *arithmós* (número) para designar a la correspondencia, que había descubierto, entre los términos de una progresión aritmética y otra geométrica. Al principio los llamó "números artificiales", pero luego cambió de opinión.

Al logaritmo que tiene por base el número **e** se le llama, en su honor, neperiano.

Pero fue el inglés Henry Briggs, un amigo de Napier, quien comenzó a usar los logaritmos con base 10. Briggs escribió acerca de su nuevo descubrimiento: "Los logaritmos son números que se descubrieron para facilitar la solución de los problemas aritméticos y geométricos, con su empleo se evitan todas las complejas multiplicaciones y divisiones, y se transforman en algo completamente simple, a través de la sustitución de la multiplicación por la adición y la división por la substracción. Además, el cálculo de las raíces también se realiza con gran facilidad".

John Napier (1550-1617)

Definición

El $\log_b N = a$, es el exponente a, al que se eleva la base b para obtener el argumento N.

$$\log_b N = a \Leftrightarrow N = b^a$$

Con N y b números reales positivos y b diferente de 1

EJEMPLOS

1 Emplea la definición de logaritmo para transformar las siguientes expresiones a su forma exponencial:

Forma logarítmica	Forma exponencial
1. $\log_3 243 = 5$	$243 = 3^5$
2. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = 6$	$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$
3. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
4. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

2 Transforma las siguientes expresiones exponenciales en expresiones logarítmicas:

Forma exponencial	Forma logarítmica
1. $N = \left(\sqrt{2}\right)^3$	$\log_{\sqrt{2}} N = 3$
2. $\frac{1}{125} = 5^{-3}$	$\log_5 \frac{1}{125} = -3$
3. $\left(\sqrt{5}\right)^4 = 25$	$\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$
4. $x^p = y$	$\log_x y = p$

EJERCICIO 140

Convierte a su forma exponencial los siguientes logaritmos:

1. $\log_2 8 = 3$
2. $\log_x 16 = 4$
3. $\log_3 81 = 4$
4. $\log_6 \frac{1}{36} = -2$
5. $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$
6. $\log_7 343 = x$
7. $\log_a \sqrt{6} = \frac{1}{2}$
8. $\log_3 (x-1) = 2$
9. $\log_w 625 = 4$
10. $\log_{(x-1)} 128 = 7$
11. $\log_{3x} 243 = 5$
12. $\log_{(2x-1)} 256 = 8$

Transforma a su forma logarítmica las siguientes expresiones:

13. $17^2 = a$
14. $625 = 5^4$
15. $64^{\frac{1}{3}} = 4$
16. $\frac{1}{16} = N^2$
17. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
18. $(x+3) = 2^4$
19. $2^x = 256$
20. $(x-2)^3 = 8$
21. $x^w = z$
22. $\frac{1}{81} = 3^{-4}$
23. $5^{-3x} = 125$
24. $441 = (3x+2)^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicación de la definición de logaritmo

En los siguientes ejemplos se aplica la definición de logaritmo para encontrar el valor de la incógnita.

EJEMPLOS

1 Encuentra el valor de a en la expresión: $\log_a 216 = 3$.

Solución

Se escribe el logaritmo en su forma exponencial y se despeja la incógnita:

$$\log_a 216 = 3 \quad \rightarrow \quad 216 = a^3 \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{216} = a \quad \rightarrow \quad 6 = a$$

Por consiguiente, el resultado es: $a = 6$

2 Encuentra el valor de m en $\log_{\sqrt{2}} m = 3$.

Solución

Se transforma a su forma exponencial la expresión y se desarrolla el exponente:

$$\log_{\sqrt{2}} m = 3 \quad \rightarrow \quad m = \left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Por tanto, el resultado es: $m = 2\sqrt{2}$

3 Determina el valor de x en la expresión: $\log_3 \frac{1}{729} = x$.

Solución

La expresión se transforma a la forma exponencial.

$$\log_3 \frac{1}{729} = x \quad \rightarrow \quad 3^x = \frac{1}{729}$$

El número 729 se descompone en factores primos y la ecuación se expresa como:

$$3^x = \frac{1}{729} \rightarrow 3^x = \frac{1}{3^6} \rightarrow 3^x = 3^{-6}$$

De la última igualdad se obtiene: $x = -6$

EJERCICIO 141

Encuentra el valor de las incógnitas en las siguientes expresiones:

1. $\log_x 25 = 2$
2. $\log_x 64 = 3$
3. $\log_y 81 = 4$
4. $\log_b 3125 = -5$
5. $\log_x 32 = \frac{5}{2}$
6. $\log_a 49 = \frac{2}{3}$
7. $\log_3 x = 4$
8. $\log_2 m = 3$
9. $\log_{0.5} y = 5$
10. $\log_4 N = \frac{3}{2}$
11. $\log_{27} w = \frac{1}{3}$
12. $\log_{\frac{3}{2}} x = -2$
13. $\log_{32} b = 0.2$
14. $\log_8 x = 0.333...$
15. $\log_6 216 = x$
16. $\log_{32} \frac{1}{4} = a$
17. $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = x$
18. $\log_{16} 0.5 = y$
19. $\log_{\frac{1}{8}} 512 = x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Propiedades

Para cualquier M, N, $b > 0$ y $b \neq 0$, se cumple que:

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b M^n = n \log_b M$
4. $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_b M$
5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$
6. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$
7. $\log_e M = \ln M$, ln = logaritmo natural y $e = 2.718281...$

Importante: las siguientes expresiones no son igualdades.

$$\log_b (M + N) \neq \log_b M + \log_b N \qquad \log_b \left(\frac{M}{N}\right) \neq \frac{\log_b M}{\log_b N}$$

Demostraciones de las propiedades de los logaritmos:

1. $\log_b 1 = 0$

Demostración:
Sea $\log_b 1 = a$, esta expresión se transforma a su forma exponencial:

$$\log_b 1 = a \quad \rightarrow \quad 1 = b^a$$

Para que $b^a = 1$, se debe cumplir que $a = 0$, entonces, al sustituir este resultado se determina que:

$$\log_b 1 = a = 0$$

2. $\log_b b = 1$

Demostración:
Sea $\log_b b = a$, se aplica la definición de logaritmo y la expresión exponencial es la siguiente:

$$\log_b b = a \quad \rightarrow \quad b = b^a$$

Pero $b = b^1$, por consiguiente $b^1 = b^a$ y $a = 1$
Al sustituir este resultado se obtiene: $\log_b b = a = 1$

3. $\log_b M^n = n \log_b M$

Demostración:
Sea $x = \log_b M$, su forma exponencial es $b^x = M$, al elevar esta expresión a la enésima potencia se determina que:

$$\left(b^x\right)^n = M^n \quad \rightarrow \quad b^{nx} = M^n$$

La forma logarítmica de esta expresión: $\log_b M^n = nx$
Se sustituye $x = \log_b M$, y se obtiene: $\log_b M^n = n \log_b M$

4. $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_b M$

Demostración:

Sea $x = \log_b M$, su forma exponencial es $b^x = M$, se extrae la raíz enésima en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt[n]{b^x} = \sqrt[n]{M}$$

El primer miembro de esta igualdad se expresa como: $b^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{M}$

Ahora esta nueva igualdad se transforma a su forma logarítmica: $\log_b \sqrt[n]{M} = \dfrac{x}{n}$

Se sustituye $x = \log_b M$, y se determina que: $\log_b \sqrt[n]{M} = \dfrac{1}{n}\log_b M$

5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

Demostración:
Sea $x = \log_b M$ y $y = \log_b N$, ésta es la forma exponencial de ambas expresiones:

$$b^x = M \;\; ; \;\; b^y = N$$

Al multiplicar estas expresiones se obtiene: $\left(b^x\right)\left(b^y\right) = MN \quad \rightarrow \quad b^{x+y} = MN$
Se transforma a su forma logarítmica: $\log_b MN = x + y$
Se sustituye $x = \log_b M$ y $y = \log_b N$, éste es el resultado:

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

6. $\log_b \dfrac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

Demostración:
Sea $x = \log_b M$ y $y = \log_b N$, ésta es su forma exponencial:

$$b^x = M \;\; ; \;\; b^y = N$$

Se divide la primera expresión entre la segunda:

$$\frac{b^x}{b^y} = \frac{M}{N} \quad \rightarrow \quad b^{x-y} = \frac{M}{N}$$

Además se transforma a su forma logarítmica la última expresión:

$$\log_b \frac{M}{N} = x - y$$

Al final se sustituye $x = \log_b M$ y $y = \log_b N$ y resulta que:

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

Aplicación de las propiedades para el desarrollo de expresiones

El logaritmo de una expresión algebraica se representa de forma distinta mediante sus propiedades y viceversa; una expresión que contiene varios logaritmos se transforma a otra que contenga un solo argumento.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Con la aplicación de las propiedades de los logaritmos desarrolla esta expresión: $\log_3 x^{12}$.

Solución

La base x se encuentra afectada por el exponente 12, por tanto se aplica la propiedad 3 y se obtiene:

$$\log_3 x^{12} = 12\log_3 x$$

2 Desarrolla la siguiente expresión: $\log_2 3x^4\sqrt{y}$.

Solución

Se aplica la propiedad para el logaritmo de un producto (propiedad 5):

$$\log_2 3x^4\sqrt{y} = \log_2 3 + \log_2 x^4 + \log_2 \sqrt{y}$$

Se aplican las propiedades 3 y 4 y la expresión queda así:

$$= \log_2 3 + 4\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y$$

3 Desarrolla a su forma más simple la expresión: $\log_y \sqrt[4]{(x-5)^3}$.

Solución

Se aplica la propiedad 4 para el radical:

$$\log_y \sqrt[4]{(x-5)^3} = \frac{1}{4}\log_y (x-5)^3$$

Ahora al aplicar la propiedad 3, se determina que:

$$= \frac{1}{4}\left[3\log_y (x-5)\right] = \frac{3}{4}\log_y (x-5)$$

4 ¿Cuál es el desarrollo de la expresión $\log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2}$?

Solución

Se aplica la propiedad para la división (propiedad 6):

$$\log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2} = \log_a (x+y)^3 - \log_a (x-y)^2$$

Para obtener la expresión que muestre el desarrollo final se aplica la propiedad 3:

$$= 3\log_a (x+y) - 2\log_a (x-y)$$

5 Desarrolla la siguiente expresión: $\ln\left[\frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2}\right]^3$.

Solución

Se aplican las propiedades de los logaritmos y se simplifica al máximo, para obtener:

$$\ln\left[\frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2}\right]^3 = 3\left[\ln\frac{e^{3x}(x+1)}{2x^2}\right]$$

Enseguida se aplica la propiedad del cociente y el producto (propiedades 5 y 6).

$$= 3\left[\ln e^{3x} + \ln(x+1) - \ln 2x^2\right]$$

En el sustraendo se aplica nuevamente la propiedad del producto, y resulta que:

$$= 3\left[\ln e^{3x} + \ln(x+1) - \left(\ln 2 + \ln x^2\right)\right]$$

Finalmente, se aplica la propiedad del exponente y se eliminan los signos de agrupación:

$$= 3\left[3x\ln e + \ln(x+1) - \ln 2 - 2\ln x\right] = 9x + 3\ln(x+1) - 3\ln 2 - 6\ln x$$

6 Desarrolla la siguiente expresión: $\log\sqrt[3]{\dfrac{3x^4}{2y^5}}$.

Solución

Se aplica la propiedad para la raíz de un número (propiedad 4):

$$\log\sqrt[3]{\frac{3x^4}{2y^5}} = \frac{1}{3}\log\frac{3x^4}{2y^5}$$

Después se aplica la propiedad para el logaritmo de un cociente (propiedad 6):

$$= \frac{1}{3}\left(\log 3x^4 - \log 2y^5\right)$$

Al aplicar la propiedad para el logaritmo de una multiplicación se obtiene:

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\log 3 + \log x^4\right) - \left(\log 2 + \log y^5\right)\right]$$

Se aplica también la propiedad 3 para exponentes:

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\log 3 + 4\log x\right) - \left(\log 2 + 5\log y\right)\right]$$

Se cancelan los signos de agrupación y éste es el desarrollo de la expresión:

$$= \frac{1}{3}\left[\log 3 + 4\log x - \log 2 - 5\log y\right]$$

$$= \frac{1}{3}\log 3 + \frac{4}{3}\log x - \frac{1}{3}\log 2 - \frac{5}{3}\log y$$

7 Escribe como logaritmo la siguiente expresión: $\log x + \log y - \log z$.

Solución

La suma de 2 logaritmos de igual base, se expresa como el logaritmo del producto de los argumentos:

$$\log x + \log y - \log z = \log xy - \log z$$

La diferencia de logaritmos de igual base, se expresa como el logaritmo del cociente de los argumentos:

$$\log xy - \log z = \log\frac{xy}{z}$$

Por tanto:

$$\log x + \log y - \log z = \log\frac{xy}{z}$$

8 Expresa como logaritmo: $2 + 3\log_a(a+1) - \dfrac{1}{4}\log_a(a-1)$.

Solución

Se sabe que $\log_a a = 1$, entonces:

$$2 + 3\log_a(a+1) - \frac{1}{4}\log_a(a-1) = 2\log_a a + 3\log_a(a+1) - \frac{1}{4}\log_a(a-1)$$

(continúa)

(*continuación*)

Los coeficientes representan los exponentes de los argumentos:

$$= \log_a a^2 + \log_a(a+1)^3 - \log_a (a-1)^{\frac{1}{4}}$$

Se aplican las propiedades de los logaritmos para la suma y diferencia:

$$= \log_a \frac{a^2(a+1)^3}{(a-1)^{\frac{1}{4}}} = \log_a \frac{a^2(a+1)^3}{\sqrt[4]{a-1}}$$

Por consiguiente:

$$2 + 3\log_a(a+1) - \frac{1}{4}\log_a(a-1) = \log_a \frac{a^2(a+1)^3}{\sqrt[4]{a-1}}$$

9 Escribe como logaritmo la siguiente expresión: $\frac{1}{3}\log(x+1) + \frac{1}{3}\log(x-2) - 2\log x - 3\log(x+3)$.

Solución

Al aplicar las propiedades de los logaritmos y simplificar se obtiene:

$$\begin{aligned}
&= \log(x+1)^{\frac{1}{3}} + \log(x-1)^{\frac{1}{3}} - \log x^2 - \log(x+3)^3 \\
&= \log(x+1)^{\frac{1}{3}} + \log(x-1)^{\frac{1}{3}} - \left[\log x^2 + \log(x+3)^3\right] \\
&= \log(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}} - \log x^2(x+3)^3 \\
&= \log \frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x^2(x+3)^3} = \log \frac{((x+1)(x-1))^{\frac{1}{3}}}{x^2(x+3)^3} \\
&= \log \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2(x+3)^3}
\end{aligned}$$

10 Expresa como logaritmo: $x - 3 + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1)$.

Solución

Se sabe que $\ln e = 1$, entonces:

$$x - 3 + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1) = (x-3)\ln e + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}(x+1)$$

Al aplicar las propiedades de los logaritmos, se tiene que:

$$\ln e^{(x-3)} + \ln(x-2)^{\frac{2}{3}} - \ln(x+1)^{\frac{1}{3}} = \ln \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}} e^{(x-3)}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}} = \ln \sqrt[3]{\frac{(x-2)^2 e^{3(x-3)}}{x+1}}$$

Por consiguiente:

$$x - 3 + \frac{2}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1) = \ln \sqrt[3]{\frac{(x-2)^2 e^{3(x-3)}}{x+1}}$$

EJERCICIO 142

Utiliza las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones:

1. $\log_a 7^4$
2. $\log_6 3^{-\frac{3}{2}}$
3. $\log_e \sqrt[3]{e^7 x}$
4. $\log 5xy^2$
5. $\log_3 x^3y^2z$
6. $\ln\left(3e^4x^2\right)^2$
7. $\log(x+y)^3(x-z)$
8. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{7}{x^2}$
9. $\ln\frac{xy^2}{e^3z^4}$
10. $\log_5 \frac{3x^3(1-2x)^6}{2x^y\left(x^2-y^2\right)}$
11. $\log_4 \sqrt{3x^2y^4}$
12. $\log\sqrt{(x+y)^4 z^5}$
13. $\log\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$
14. $\log\frac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt[3]{c^2d}}$
15. $\log_2 \frac{\sqrt{x+y}}{(x-y)^4}$
16. $\log\frac{x^2}{\sqrt[3]{x-3(x+z)^2}}$
17. $\log\sqrt{\frac{(x+3)(y-5)}{(x+6)^4\sqrt{y-2}}}$
18. $\ln\sqrt[3]{\frac{e^2\sqrt{(x+1)^4(x-1)^3}}{e^x\sqrt[5]{\left(x^2-1\right)^4}}}$

Aplica las propiedades de los logaritmos para expresar los siguientes logaritmos como el logaritmo de un solo argumento:

19. $2\ln 5+2\ln x$
20. $3\log m-2\log n$
21. $\frac{1}{2}\log_7 x+\frac{1}{3}\log_7 y$
22. $\ln 8+4x$
23. $\frac{2}{5}\log m+4\log n$
24. $2x+\log_2 3$
25. $-\frac{2}{3}\log_b(x+1)-\frac{1}{4}\log_b(x+2)$
26. $\log 3+\log y-\log x$
27. $\log_2 x-\log_2 y-\log_2 z$
28. $1-\log_4(m-1)-\log_4(m+1)$
29. $\frac{1}{8}\log x+\frac{1}{3}\log y-\frac{1}{4}\log z$
30. $\ln 5+1+\ln y-7\ln x$
31. $2-x+3\ln(x+y)-3\ln(x-y)$
32. $\frac{2}{3}\log(x-2)-\frac{4}{5}\log(x+2)+2\log(x+1)$
33. $\frac{1}{2}+7\log_2 x-\frac{3}{2}\log_2 y$
34. $\frac{1}{3}\log(x+1)+\frac{1}{2}\log(x-1)-\frac{1}{6}\log x-1$
35. $x^2+x+1-2\log x+3\log(x+1)$
36. $2\ln 9+4\ln m+2\ln p-2\ln 7-2\ln x-6\ln y$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuaciones logarítmicas

En estas ecuaciones las incógnitas se encuentran afectadas por logaritmos, su solución se obtiene al aplicar las propiedades y la definición de logaritmo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la siguiente ecuación: $\log_5(2x+1)=2$.

Solución

Al aplicar la definición de logaritmo, la expresión $\log_5(2x+1)=2$ se convierte en:

$$2x+1=5^2$$

Ahora al resolver esta ecuación, se obtiene:

$$2x+1=5^2 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 2x+1&=25\\ 2x&=24\\ x&=12\end{aligned}$$

2 ¿Cuáles son los valores de x que satisfacen la ecuación $\log(x+2)+\log(x-1)=1$?

Solución

Se aplica la propiedad 5 para expresarla en término de un solo logaritmo:

$$\log(x+2)+\log(x-1)=1 \quad \rightarrow \quad \log(x+2)(x-1)=1 \quad \rightarrow \quad \log\left(x^2+x-2\right)=1$$

Se aplica la definición de logaritmo y se resuelve factorizando la ecuación que resulta:

$$\log\left(x^2+x-2\right)=1 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x^2+x-2&=10^1\\ x^2+x-2-10&=0\\ x^2+x-12&=0\\ (x+4)(x-3)&=0\\ x+4=0 \quad \text{y} \quad x-3&=0\end{aligned}$$

Por consiguiente, los valores que satisfacen las igualdades son: $x=-4$ y $x=3$, y el valor que satisface la ecuación es $x=3$

3 Resuelve: $\log_3(4x-5)=\log_3(2x+1)$.

Solución

Se agrupan los logaritmos en el primer miembro de la igualdad y se aplica la propiedad 6:

$$\log_3(4x-5)=\log_3(2x+1) \quad \rightarrow \quad \log_3(4x-5)-\log_3(2x+1)=0 \quad \rightarrow \quad \log_3\frac{4x-5}{2x+1}=0$$

Se aplica la definición de logaritmo y se resuelve la ecuación que resulta:

$$\frac{4x-5}{2x+1}=3^0 \quad \rightarrow \quad \frac{4x-5}{2x+1}=1 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 4x-5&=2x+1\\ 2x&=6\\ x&=3\end{aligned}$$

4 Resuelve la ecuación: $\log_2\sqrt{3x-1}=1-\log_2\sqrt{x+1}$.

Solución

Se agrupan los logaritmos en un solo miembro de la igualdad:

$$\log_2\sqrt{3x-1}+\log_2\sqrt{x+1}=1$$

Se aplica la propiedad 5 para expresar la suma de logaritmos como el logaritmo de un producto:

$$\log_2\left(\sqrt{3x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}\right)=1$$

Se transforma la expresión a su forma exponencial y se multiplican los factores:

$$\left(\sqrt{3x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}\right)=2^1 \quad\rightarrow\quad \sqrt{3x^2+2x-1}=2$$

Para eliminar la raíz se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{3x^2+2x-1}\right)^2=(2)^2 \quad\rightarrow\quad 3x^2+2x-1=4$$

Se resuelve la ecuación resultante:

$$3x^2+2x-1=4 \quad\rightarrow\quad 3x^2+2x-1-4=0 \quad\rightarrow\quad 3x^2+2x-5=0$$

$$3x^2+5x-3x-5=0$$

$$x(3x+5)-1(3x+5)=0$$

$$(3x+5)(x-1)=0$$

$$x=-\frac{5}{3},\ x=1$$

Por consiguiente, los valores de la incógnita son: $-\frac{5}{3}$ y 1, el valor que satisface la ecuación logarítmica es $x = 1$

5 Resuelve la ecuación: $\ln(x+5)=2+\ln x$.

Solución

Los logaritmos se colocan de un solo lado de la igualdad:

$$\ln(x+5)-\ln x=2$$

Se aplica la propiedad de división de argumentos:

$$\ln\frac{x+5}{x}=2$$

Se transforma a su forma exponencial y se resuelve la ecuación resultante:

$$e^2=\frac{x+5}{x} \qquad xe^2=x+5 \qquad xe^2-x=5$$

$$x(e^2-1)=5$$

$$x=\frac{5}{e^2-1}$$

EJERCICIO 143

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1. $\log_2(x+3)=2$
2. $\log_4(4-3x)=3$
3. $\log_6(5x-9)^2=4$
4. $\log_4\sqrt{15x+1}=2$
5. $\log\sqrt{x^2+64}=1$
6. $\log_3 81-\log_3(x-4)=2$
7. $\log_7(x+9)+\log_7 49=4$
8. $\log_5 25-\log_5(x+100)=-1$

9. $\log(x+3)^2 = 1+\log(3x-11)$
10. $\log_3 x + \log_3(2x-3) = 3$
11. $\log(x+2) = -1+\log(3x-14)^2$
12. $\log_5(4-x)^3 = \log_5(6+x)^3$
13. $\log(2x+10)^2 - \log(1-x) = 2$
14. $\log_8(x-4)+\log_8(x-1) = \log_8 5x - \log_8 3$
15. $\log_6\sqrt[3]{3x+1} = \log_6\sqrt[3]{10}+\log_6\sqrt[3]{x-2}$
16. $\log(8x+4) + \log(7x+16) = \log(x-2)^2+2$
17. $\log_2(x-1) - \log_2(3x+1) = 3-\log_2(6x+2)$
18. $\log_{\sqrt{2}}(x-3)+\log_{\sqrt{2}}(x+2) = 4+\log_{\sqrt{2}} x$
19. $\log_2(x+1) + \log_2(3x-5) = \log_2(5x-3)+2$
20. $\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x}+1\right) = 1+\log_{\sqrt{3}}\sqrt{x-1}$
21. $\ln(x+1) = 1+\ln(x-1)$
22. $\ln x + \ln(x-3e) = \ln 4 + 2$
23. $\ln(x-2) = \ln 12 - \ln(x+2)$
24. $\ln(x-1) - \ln(x-2) = \frac{1}{2}$
25. $\ln(2x-3) - \ln(x+1) = e$
26. $\ln(x^2+x) + \ln e = \ln(x+1)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones que tienen la incógnita en el exponente se llaman ecuaciones exponenciales y su solución se obtiene al aplicar los siguientes métodos:

1. Si el argumento o resultado se puede expresar como potencia de la base, sólo se igualan exponentes.
2. Se aplican las propiedades de los logaritmos para encontrar el valor de la incógnita.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor de la incógnita en la ecuación: $2^{x+1} = 32$.

Solución

Se expresa a 32 como 2^5, se sustituye en la ecuación:

$$2^{x+1} = 32 \quad\rightarrow\quad 2^{x+1} = 2^5$$

En la ecuación resultante las bases son iguales, entonces, también los exponentes:

$$x+1 = 5$$

Al resolver esta ecuación, se determina que: $x = 4$

2 Obtén el valor de la incógnita en la ecuación: $9^{x-1} = 81^x$.

Solución

El resultado 81^x se expresa como 9^{2x}, al sustituir la equivalencia:

$$9^{x-1} = 81^x \quad\rightarrow\quad 9^{x-1} = 9^{2x}$$

Para que la igualdad se cumpla, tanto bases como exponentes deben ser iguales, entonces:

$$x-1 = 2x$$

Se resuelve la ecuación y resulta que: $x = -1$

3 Resuelve la siguiente ecuación: $4^{x-2} = 8^{1-x}$.

Solución

Ambas bases se descomponen en sus factores primos y la ecuación se expresa como:

$$4^{x-2} = 8^{1-x} \rightarrow (2^2)^{x-2} = (2^3)^{1-x} \rightarrow 2^{2(x-2)} = 2^{3(1-x)}$$

Se eliminan las bases y se igualan los exponentes, para obtener la ecuación:

$$2(x-2) = 3(1-x)$$

Finalmente se resuelve la ecuación y se determina el valor de la incógnita:

$$\begin{aligned} 2(x-2) &= 3(1-x) \\ 2x-4 &= 3-3x \\ 2x+3x &= 3+4 \\ 5x &= 7 \\ x &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Otra forma de resolver una ecuación exponencial es aplicar logaritmos, como ilustran los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

1 Resuelve la siguiente ecuación: $5^x = 625^2$.

Solución

Se aplican logaritmos a los dos miembros de la igualdad:

$$\log 5^x = \log 625^2$$

Se aplica la propiedad 3 para despejar a x y se efectúan las operaciones:

$$x \log 5 = 2 \log 625$$

$$x = \frac{2\log 625}{\log 5} = \frac{2(2.7959)}{0.6989} = 8$$

Por tanto, $x = 8$

2 ¿Cuál es el valor de la incógnita en la siguiente ecuación: $3^{2x-1} = 7$?

Solución

Se aplican logaritmos en ambos miembros de la igualdad,

$$\log 3^{2x-1} = \log 7$$

Se aplica la propiedad 3, se despeja x y se obtiene como resultado:

$$(2x-1)\log 3 = \log 7 \rightarrow 2x-1 = \frac{\log 7}{\log 3}$$

$$x = \frac{\frac{\log 7}{\log 3}+1}{2} = 1.3856$$

3 ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $3^{2x} - 5(3^x) + 6 = 0$?

Solución

Esta ecuación se expresa como una ecuación de segundo grado, de la forma:

$$(3^x)^2 - 5(3^x) + 6 = 0$$

Se factoriza y se resuelven las ecuaciones resultantes:

$$\left(3^x - 3\right)\left(3^x - 2\right) = 0$$

$$3^x - 3 = 0 \qquad\qquad 3^x - 2 = 0$$

$$3^x = 3 \qquad\qquad 3^x = 2$$

$$\log 3^x = \log 3 \qquad\qquad \log 3^x = \log 2$$

$$x \log 3 = \log 3 \qquad\qquad x \log 3 = \log 2$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 3} = \frac{0.4771}{0.4771} = 1 \qquad\qquad x = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0.3010}{0.4771} = 0.6309$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son: 1 y 0.6309

4 Resuelve la ecuación: $\dfrac{e^{2y} + 4}{e^{2y}} = 3$.

Solución

La ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$e^{2y} + 4 = 3e^{2y}$$

Se despeja el término e^{2y}:

$$e^{2y} - 3e^{2y} = -4 \qquad\qquad -2e^{2y} = -4$$

$$e^{2y} = 2$$

En ambos miembros de la igualdad se aplica el logaritmo natural y se obtiene:

$$\ln e^{2y} = \ln 2 \qquad 2y \ln e = \ln 2 \qquad 2y(1) = \ln 2$$

$$2y = \ln 2$$

$$y = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$y = \ln\sqrt{2}$$

EJERCICIO 144

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $5^x = 625$
2. $3^x = 8$
3. $9^{2x} = 9^0$
4. $64^x = 8$
5. $(2.37)^x = 2.83$
6. $(2.4)^x = 5.76$
7. $5^{x-1} = 25$
8. $7^{3x-3} = 343$
9. $3^{2x+3} = 3$
10. $4^{x+1} = 16^{x-1}$
11. $5^{2x-3} = 4$
12. $3^x = 0.15$
13. $(0.125)^x = 128$
14. $2^{3x+1} = 256$
15. $5^x = 625^{3+x}$
16. $49^{1-2x} = 7^x$
17. $25^{x-2} = 5^{1-x}$
18. $3^x = 243^{x-2}$
19. $2^{-(x+3)} = 32^x$
20. $3^{x^2} = 729$
21. $2^{x^2-2x} = 8$

22. $25^x + 5^{x+1} = 750$

23. $6^{2x+5} - 36 = 0$

24. $4^{x^2+3x} = \frac{1}{16}$

25. $7(3)^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

26. $\log_2\left(9^{x-1} + 7\right) = \log_2\left(3^{x-1} + 1\right)^2$

27. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = \sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

28. $12^{x^2-2x+3} = 1\,728$

29. $5\left(7^{2x-1}\right) = 7\left(5^{x+2}\right)$

30. $2^{-2x} + 2^{-x} = 2$

31. $\frac{e^y - 1}{2 - 3e^y} = \frac{2}{7}$

32. $e^{2x} - e^{x+2} = e^{x+1} - e^3$

33. $\frac{4e^{3x} - 5}{e^{3x} - 1} = 3$

34. $\frac{e^x}{e^x - 2} - \frac{3}{e^x + 2} = \frac{6}{e^{2x} - 4}$

35. $e^{2x} + 2\sqrt{e^{2x+1}} = 1 - e$

36. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{3}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Los logaritmos son una herramienta excelente para la solución de problemas propios de las ciencias, a continuación se ejemplifica su uso:

Química

En química los logaritmos se emplean para calcular la acidez de las soluciones.

$$\text{pH} = -\log\left[\text{H}^+\right]$$

Donde:

pH = acidez de una solución.

$\left[\text{H}^+\right]$ = concentración de iones de hidrógeno en iones-gramo equivalente por litro.

1 Determina el pH de una solución, que tiene una concentración de iones de hidrógeno de 10^{-8} iones-g/lt.

Solución

La concentración de iones de hidrogeno en la solución es de:

$$\left[\text{H}^+\right] = 10^{-8} \text{ iones-g/lt}$$

Se sustituye este valor en la fórmula y se obtiene:

$$\text{pH} = -\log\left[\text{H}^+\right]$$
$$\text{pH} = -\log\left[10^{-8}\right] \quad \text{se aplica la propiedad 3}$$
$$\text{pH} = -(-8)\log[10] = (8)(1)$$
$$\text{pH} = 8$$

2 Encuentra la concentración de iones de hidrógeno de una solución, si su pH es de 7.

Solución

Se sustituye pH = 7 en la fórmula y se despeja $\left[\text{H}^+\right]$

$$\text{pH} = -\log\left[\text{H}^+\right]$$
$$7 = -\log\left[\text{H}^+\right]$$
$$-7 = \log\left[\text{H}^+\right]$$
$$\text{anti}\log(-7) = \left[\text{H}^+\right]$$

Por consiguiente, la concentración de iones de hidrógeno de una solución es:

$$\left[\text{H}^+\right] = 10^{-7} \text{ iones-g/lt}$$

Sismología

En sismología los logaritmos se emplean para calcular la intensidad de un sismo por medio del siguiente modelo matemático:

$$I_R = \log \frac{A}{t}$$

Donde:

I_R = intensidad del sismo (escala Richter)
A = amplitud (micrómetros)
t = periodo (tiempo en segundos que dura una oscilación)

3 ¿Cuál es la intensidad de un sismo en la escala Richter si su amplitud es de 8 000 micrómetros y su periodo de 0.09 segundos?

Solución

Se sustituye $A = 8\,000$ micrómetros y $P = 0.09$ segundos en la fórmula:

$$I_R = \log \frac{A}{t} \qquad I_R = \log \frac{8\,000}{0.09}$$
$$= \log(88\,888.89)$$
$$= 4.95$$

Por tanto, el sismo tiene una intensidad de 4.95 grados en la escala Richter.

4 Un sismo tiene una intensidad de 5.7 grados en la escala Richter, si la amplitud del movimiento es de 9 021.37 micrómetros, ¿cuál es su periodo?

Solución

Se despeja la amplitud de la fórmula:

$$I_R = \log \frac{A}{t} \quad \rightarrow \quad \text{anti}\log I_R = \frac{A}{t}$$
$$t = \frac{A}{\text{anti}\log I_R}$$

Se sustituye en esta última fórmula $I_R = 5.7$ y $A = 9\,021.37$ micrómetros:

$$t = \frac{9\,021.37}{\text{anti}\log 5.7}$$
$$= \frac{9\,021.37}{501187.23} = 0.0179$$

Por consiguiente, el periodo de una oscilación es de 0.0179 segundos.

Decaimiento radiactivo

Otra aplicación de los logaritmos se lleva a cabo en el decaimiento radiactivo. El decaimiento radiactivo de un material está dado por la fórmula:

$$C = C_0(2)^{-\frac{t}{n}}$$

Donde:

C = cantidad de material radiactivo después de cierto tiempo
t = antigüedad del material
C_0= cantidad presente cuando $t = 0$
n = vida media del material

5 El tiempo de vida media de un material es de 25 años, ¿cuánto de dicho material queda después de haber transcurrido 15 años?

Solución

Se sustituye en la fórmula $n = 25$ y $t = 15$ años:

$$C = C_0(2)^{-\frac{t}{n}} \quad \rightarrow \quad C = C_0(2)^{-\frac{15}{25}}$$

$$C = C_0(2)^{-0.6}$$

$$C = C_0(0.659) = 0.659C_0$$

Por consiguiente, queda $0.659C_0$ o 65.9% del material inicial.

6 ¿Cuál es la antigüedad de una figura de madera que tiene la cuarta parte de su contenido original de carbono 14, si la vida media del material es de 5 900 años?

Solución

Con las propiedades de los logaritmos se despeja t:

$$C = C_0(2)^{-\frac{t}{n}} \quad \rightarrow \quad \frac{C}{C_0} = (2)^{-\frac{t}{n}} \quad \rightarrow \quad \log\left(\frac{C}{C_0}\right) = \log(2)^{-\frac{t}{n}}$$

$$\log\left(\frac{C}{C_0}\right) = -\frac{t}{n}\log(2) \quad \rightarrow \quad -\frac{n\log\left(\frac{C}{C_0}\right)}{\log 2} = t$$

Se sustituye $C = \frac{1}{4}C_0$ y $n = 5\,900$ en la última fórmula:

$$t = -\frac{(5\,900)\log\left(\frac{\frac{1}{4}C_0}{C_0}\right)}{\log 2} = -\frac{(5\,900)\log(0.25)}{\log 2} = -\frac{(-3552.15)}{0.3010} = 11\,801.16 \text{ años}$$

Por tanto, la antigüedad de la pieza es de 11 801.16 años.

7 La desintegración de cierta sustancia radiactiva se rige por el modelo matemático:

$$p = p_0 e^{-0.0072\,t}$$

Donde p_0 es la cantidad inicial de sustancia y t es el tiempo en años. ¿Calcula el tiempo de vida media de la sustancia?

Solución

El tiempo de vida media es el tiempo necesario para que la mitad de la sustancia se desintegre, es decir $p = \frac{1}{2}p_0$, entonces, se despeja t de la fórmula:

$$p = p_0 e^{-0.0072t} \qquad \frac{p}{p_0} = e^{-0.0072t} \qquad \ln\frac{p}{p_0} = \ln e^{-0.0072t}$$

$$\ln\frac{p}{p_0} = -0.0072t\ln e \qquad -\frac{\ln\frac{p}{p_0}}{0.0072} = t$$

Se sustituye $p=\frac{1}{2}p_0$ y se realizan las operaciones:

$$t=-\frac{\ln\frac{p}{p_0}}{0.0072} \qquad t=-\frac{\ln\frac{\frac{1}{2}p_0}{p_0}}{0.0072}=-\frac{\ln 0.5}{0.0072}=96.27$$

Por consiguiente, el tiempo de vida media de dicha sustancia es de 96.27 años.

Población

El crecimiento de población está determinado por la fórmula:

$$N=N_o\,e^{kt}$$

Donde:

N = número de habitantes de una población en determinado tiempo
N_o = número de habitantes en una población inicial, cuando $t=0$
K = constante
t = tiempo

8 El modelo matemático que rige el crecimiento de una población es:

$$N=3500e^{0.025t}$$

Calcula el número de habitantes que habrá en 20 años.

Solución

Se sustituye el valor de $t=20$ en la fórmula:

$$N=3500e^{0.025(20)}$$

$$=3500e^{0.5}=5\,770.52$$

Por tanto, en 20 años habrá aproximadamente 5 770 habitantes.

9 El siguiente modelo muestra el crecimiento de una población de insectos:

$$N=850(3)^{0.094t}$$

Donde N es el número de insectos y t el tiempo en días. ¿En qué tiempo la población será de 10 200 insectos?

Solución

Se despeja t de la fórmula:

$$N=850(3)^{0.094t} \qquad \frac{N}{850}=(3)^{0.094t} \qquad \ln\frac{N}{850}=0.094t\ln(3) \qquad \frac{\ln\frac{N}{850}}{0.094\ln(3)}=t$$

Se sustituye $N=10\,200$ en la última fórmula:

$$t=\frac{\ln\frac{10\,200}{850}}{0.094\ln(3)}=\frac{\ln 12}{0.094\ln(3)}=\frac{2.4849}{0.1032}=24.07\text{ días}$$

Por consiguiente, deben transcurrir 24.07 días para que se incremente la población de insectos a 10 200.

10 En un cultivo de laboratorio las bacterias aumentaron de una población inicial de 480 a 1 200 en cinco horas. ¿Cuánto tardará la población en aumentar a 8 000?

Solución

Se determina el valor de k para la población inicial, donde $N_o = 480$, $N = 1\,200$, $t = 5$,

$$N = No\, e^{kt} \quad \rightarrow \quad 1\,200 = 480\, e^{k(5)} \quad \rightarrow \quad \frac{1200}{480} = e^{5k} \quad \rightarrow \quad e^{5k} = 2.5$$

Se aplica logaritmo natural para despejar k:

$$\ln\left(e^{5k}\right) = \ln 2.5 \quad \rightarrow \quad 5k \ln(e) = \ln 2.5 \quad \rightarrow \quad k = \frac{\ln 2.5}{5} = \frac{0.9162}{5} = 0.183$$

Entonces, el modelo matemático se expresa como: $N = N_o e^{0.183\,t}$

Se sustituye en la fórmula $N = 8\,000$ y $N_o = 480$

$$8\,000 = 480 e^{(0.183)\,t}$$

Para despejar t se aplican logaritmos naturales:

$$\frac{8\,000}{480} = e^{0.183t} \quad \rightarrow \quad \ln\frac{8\,000}{480} = \ln e^{0.183t} \quad \rightarrow \quad \ln\frac{8\,000}{480} = 0.183t \quad \rightarrow \quad t = \frac{\ln\dfrac{8\,000}{480}}{0.183} = 15.37$$

Por tanto, en 15.37 horas o en 15 horas 22 minutos 12 segundos, las bacterias aumentarán de 480 a 8 000

Ley del enfriamiento de Newton

Con esta ley se obtiene la temperatura T de un cuerpo en función del tiempo t; donde T' es la temperatura ambiente, el modelo matemático que la rige es:

$$T = T' + Ce^{kt}$$

Donde:

T' = temperatura del ambiente
T = temperatura del cuerpo después de cierto tiempo, además $T < T'$
C y k = constantes

11 Una barra de metal se extrae de un horno cuya temperatura es de 250°C. Si la temperatura del ambiente es de 32°C y después de 10 minutos la temperatura de la barra es de 90°C, ¿cuál es su temperatura después de 30 minutos?

Solución

La temperatura del ambiente es $T' = 32$°C, la temperatura de la barra al momento de sacarla del horno es de $T = 250$°C y $t = 0$. Al sustituir estos valores en la ley del enfriamiento de Newton.

$$T = T \;\; + Ce^{kt} \qquad 250 = 32 + Ce^{k(0)} \qquad 250 = 32 + C$$
$$250 - 32 = C$$
$$218 = C$$

Se sustituye el valor de $C = 218$°C en la ley:

$$T = 32 + 218e^{kt}$$

Se sustituye $t = 10$ minutos y $T = 90$°C en la ley y se despeja $e^{k(10)}$

$$90 = 32 + 218e^{k(10)} \qquad \frac{90 - 32}{218} = e^{k(10)} \qquad 0.2660 = e^{10k}$$

En la última igualdad se aplica logaritmo natural a ambos miembros para despejar a k:

$$\ln 0.2660 = \ln e^{10k} \qquad \ln 0.2660 = 10k \ln e \qquad \frac{\ln 0.2660}{10} = k$$

$$-0.1324 = k$$

Al sustituir este valor se obtiene que la ley del enfriamiento para la barra es:

$$T = 32 + 218e^{-0.1324t}$$

Finalmente, se sustituye $t = 30$ minutos en la fórmula anterior:

$$T = 32 + 218e^{-0.1324(30)} \qquad \begin{aligned} T &= 32 + 218e^{-3.972} \\ &= 32 + 218(0.01883) \\ &= 32 + 4.1049 \\ &= 36.1049\,°\text{C} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la temperatura de la barra después de 30 minutos es de: $36.1049\,°\text{C}$

EJERCICIO 145

Resuelve los siguientes problemas:

1. Obtén el pH de una solución, cuya concentración es de 1.90×10^{-5} iones de hidrógeno/lt.
2. La concentración de una conserva de vinagre de iones de hidrógeno es de 6×10^{-4}. Determina su pH.
3. ¿Cuál es la concentración de iones de hidrógeno de una sustancia, cuyo pH es de 9?
4. Un sismo se presenta con 6 000 micrómetros de amplitud y un periodo de 0.3 segundos. Determina la intensidad del movimiento sísmico en la escala Richter.
5. Encuentra el periodo de un sismo de 90 000 micrómetros con intensidad de 5 grados en la escala Richter.
6. Un sismo tiene un periodo 0.35 segundos de duración y alcanza 4 grados en la escala Richter. ¿Cuál es su amplitud?
7. El tiempo de vida media de un material es de 40 años. ¿Cuánto de dicho material queda después de 30 años?
8. La vida media del tritio es de 12.5 años. ¿Cuánto tardará en desintegrarse 30% de una muestra de este metal?
9. La desintegración de una sustancia radiactiva está dada por el siguiente modelo:

   $$V = V_0 e^{-0.005t}$$

   Donde V_0 es la cantidad inicial de material y t es el tiempo. ¿Cuál es el tiempo de vida media de dicho material?
10. El modelo que rige el crecimiento poblacional de una ciudad es:

    $$N = 15\,000e^{0.02t}$$

    Donde N es el número de habitantes y t el tiempo en años. ¿Cuántos habitantes habrá dentro de 10 años?
11. En un cultivo de laboratorio las bacterias aumentaron de una población inicial de 150 a 830 en 2 horas. ¿Cuánto tardarán en llegar a 3 000?
12. La población actual de ratas en una ciudad es de 40 000; si se duplican cada 8 años, ¿cuándo habrá 500 000 roedores?
13. Del horno de una estufa se saca una rosca, cuya temperatura es de 180°C. Si la temperatura del ambiente es de 25°C, y después de 8 minutos la temperatura de la rosca es de 100°C, ¿cuál es su temperatura después de 15 minutos?

14. La temperatura del ambiente una tarde es de 21°C. Si se sirve agua para café con una temperatura de 95°C, y después de 4 minutos la temperatura del agua es de 80°C, ¿cuál es su temperatura después de 20 minutos?

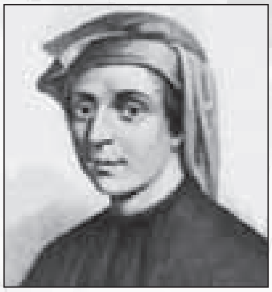
15. Una barra de aluminio se encuentra a una temperatura de 400°C y la temperatura ambiental es de 28°C. Si después de 30 minutos la temperatura de la barra es de 300°C, ¿cuántos minutos deben transcurrir para que su temperatura sea de 120°C?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 2

Progresiones

Reseña HISTÓRICA



Sucesión de Fibonacci

Leonardo de Pisa nació en Italia y fue educado en África del norte. Su obra principal es *Liber Apaci* (*Libro acerca del ábaco*), donde expone la importancia del sistema de numeración indoarábiga. Escrita en 1202 sólo se conserva una versión de 1228, donde aparece un problema sobre el nacimiento de conejos, que da origen a la sucesión de Fibonacci. Por muchos años fue objeto de numerosos estudios que permitieron descubrir muchas de sus propiedades, además de que Kepler la relacionó con la sección áurea y el crecimiento de las plantas.

La sucesión de Fibonacci se define por:

$$f_1 = f_2 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

cuyos primeros términos son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Leonardo de Pisa "Fibonacci"
(1170-1250)

Sucesión infinita

Una sucesión es de la forma:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

donde a_n es el término general y se denota por:

$$a_n = f(n) \text{ o } \{a_n\}$$

Siendo n un número natural, así: a_1 representa el primer término, a_2 el segundo término, a_3 el tercer término, a_{26} el vigésimo sexto término y a_n el n–ésimo término de la sucesión.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La sucesión con n–ésimo término $a_n = \dfrac{1}{4n}$, con $n \in N$, se escribe como:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \ldots, \frac{1}{4n}, \ldots$$

2 Escribe la sucesión con n–ésimo término $\{3^n\}$.

Solución

Ya que n es natural entonces toma los valores 1, 2, 3, 4,…,

$$a_1 = 3^1 \qquad a_2 = 3^2 \qquad a_3 = 3^3 \qquad a_4 = 3^4 \qquad \ldots \qquad a_n = 3^n$$

Por consiguiente, la sucesión es:

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots, 3^n, \ldots \quad \text{o} \quad 3, 9, 27, 81, \ldots$$

3 Encuentra los términos que conforman la sucesión con término general $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$.

Solución

El término general es:

$$a_n = \frac{2n-1}{n}$$

Para determinar los elementos de la sucesión, se sustituyen los números naturales:

Si $n = 1$, $a_1 = \dfrac{2(1)-1}{1} = \dfrac{2-1}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

Si $n = 2$, $a_2 = \dfrac{2(2)-1}{2} = \dfrac{4-1}{2} = \dfrac{3}{2}$

Si $n = 3$, $a_3 = \dfrac{2(3)-1}{3} = \dfrac{6-1}{3} = \dfrac{5}{3}$

Por tanto, los términos de la sucesión son: $1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{3}, \ldots, \dfrac{2n-1}{n}$

4 Determina los 4 primeros términos de $\{(-1)^{n+1} - 2n\}$.

Solución

Se sustituyen los valores de $n = 1, 2, 3, 4$ en el término general:

$$\text{Si } n = 1,\ a_1 = (-1)^{1+1} - 2(1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$\text{Si } n = 2,\ a_2 = (-1)^{2+1} - 2(2) = (-1)^3 - 4 = -1 - 4 = -5$$

$$\text{Si } n = 3,\ a_3 = (-1)^{3+1} - 2(3) = (-1)^4 - 6 = 1 - 6 = -5$$

$$\text{Si } n = 4,\ a_4 = (-1)^{4+1} - 2(4) = (-1)^5 - 8 = -1 - 8 = -9$$

Se concluye que los cuatro primeros términos son:

$$-1, -5, -5, -9$$

5 Determina los 5 primeros términos de la sucesión, si $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 3a_n$.

Solución

De acuerdo con la regla general se tiene que:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 3a_1 = 3(2) = 6$$

$$a_3 = 3a_2 = 3(6) = 18$$

$$a_4 = 3a_3 = 3(18) = 54$$

$$a_5 = 3a_4 = 3(54) = 162$$

Por consiguiente, los 5 primeros términos de la sucesión son:

$$2, 6, 18, 54, 162$$

EJERCICIO 146

Escribe los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones:

1. $a_n = \dfrac{1}{n}$
2. $a_n = 10 - (0.1)^n$
3. $a_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$
4. $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{n+3}$
5. $a_n = \dfrac{2n-1}{n!}$
6. $\left\{(-1)^n n^2\right\}$
7. $\{(n-1)(n-2)\}$
8. $\left\{(-1)^{2n-1}\dfrac{n}{n+1}\right\}$
9. $\left\{\dfrac{n!}{(n-1)!}\right\}$
10. $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{2n}{n+1}\right\}$
11. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$
12. $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = \dfrac{3}{2} - a_n$
13. $a_1 = \dfrac{2}{3},\ a_{n+1} = a_n - 1$
14. $a_1 = 27,\ a_{n+1} = -\dfrac{1}{3}a_n$
15. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = na_n$
16. $a_1 = -2,\ a_{n+1} = (a_n)^2$
17. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a_n}{n}}$
18. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = (-a_n)^{n-1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma

Dada una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n,\ldots$, la suma de los primeros m términos se expresa como:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m$$

donde 1 y m son los valores mínimo y máximo de la variable de la suma j.

Evaluación de una suma. Es el resultado de la suma de los primeros m términos de una sucesión.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma: $\sum_{j=1}^{5} j^2$.

Solución

Se sustituyen los valores 1, 2, 3, 4, 5 en el término general y se realiza la suma:

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

Por tanto, la suma es: 55

2 Encuentra el resultado de la suma: $\sum_{j=3}^{6}(j+2)$.

Solución

Se sustituyen los valores: 3, 4, 5, 6 en el término general, y se suman los resultados parciales para obtener como resultado final:

$$\sum_{j=3}^{6}(j+2) = (3+2)+(4+2)+(5+2)+(6+2) = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$$

3 Determina la suma: $\sum_{j=1}^{7} 3$.

Solución

Debido a que no existe j en la fórmula de sustitución, 3 se suma 7 veces y se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{7} 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$$

4 ¿Cuál es el resultado de $\sum_{j=1}^{5}(j+2)(j-3)$?

Solución

Se sustituyen los enteros del 1 al 5:

$$\sum_{j=1}^{5}(j+2)(j-3) = (1+2)(1-3) + (2+2)(2-3) + (3+2)(3-3) + (4+2)(4-3) + (5+2)(5-3)$$

Se realizan las operaciones de los paréntesis y, por último, se efectúa la suma para obtener:

$$\begin{aligned} &= (3)(-2) + (4)(-1) + (5)(0) + (6)(1) + (7)(2) \\ &= -6 - 4 + 0 + 6 + 14 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Por tanto: $\sum_{j=1}^{5}(j+2)(j-3) = 10$

5 Determina el valor de c que cumpla con la siguiente igualdad: $\sum_{j=1}^{4}(cj-1)^2 = 214$.

Solución

Se desarrolla la suma:

$$(c-1)^2+(2c-1)^2+(3c-1)^2+(4c-1)^2 = 214$$

Se desarrollan los binomios y se reducen los términos semejantes, para luego resolver la ecuación resultante:

$$c^2-2c+1+4c^2-4c+1+9c^2-6c+1+16c^2-8c+1=214$$
$$30c^2-20c-210=0$$
$$3c^2-2c-21=0$$

Por consiguiente: $c=3$ y $-\frac{7}{3}$

EJERCICIO 147

Determina las siguientes sumas:

1. $\sum_{j=1}^{8}(2j-3)$
2. $\sum_{j=0}^{10}(j^2-4j)$
3. $\sum_{j=0}^{5}\frac{j+1}{j+2}$
4. $\sum_{j=1}^{6}2^j$
5. $\sum_{j=1}^{6}\left(\sqrt{j+1}-\sqrt{j}\right)$
6. $\sum_{j=1}^{9}2$
7. $\sum_{j=0}^{4}(-2)^{j-1}$
8. $\sum_{j=4}^{10}3$
9. $\sum_{j=1}^{n}n$
10. $\sum_{j=1}^{n}j$

Determina el valor de c que cumpla con las siguientes igualdades:

11. $\sum_{j=1}^{20}2c=120$
12. $\sum_{j=2}^{8}\frac{c}{3}=\frac{7}{3}$
13. $\sum_{j=4}^{9}(cj-2)=105$
14. $\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{cj-1}{3}\right)^2=\frac{286}{9}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Progresión aritmética o sucesión aritmética

La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, es una progresión aritmética si existe un número real r, tal que para todo número natural m se cumple que:

$$a_m = a_{m-1} + r$$

Donde la diferencia común o razón es $r = a_m - a_{m-1}$

Ejemplos

Determina si las siguientes sucesiones son aritméticas:

a) $2, 6, 10, 14, \ldots, 4n-2$

b) $-3, -5, -7, -9, \ldots, -2n-1$

c) $2, 4, 7, 11, \ldots, \frac{n^2+n+2}{2}$

Solución

a) De la sucesión: 2, 6, 10, 14,…, $4n-2$, determina la diferencia común:

$$r = a_m - a_{m-1} = \left[4(m)-2\right]-\left[4(m-1)-2\right] = \left[4m-2\right]-\left[4m-4-2\right]$$
$$= 4m-2-4m+4+2$$
$$= 4$$

Esto significa que los términos de la sucesión se encuentran sumando 4 al término anterior, por tanto, la sucesión es aritmética.

b) Se determina la diferencia común de la sucesión:

$$r = a_m - a_{m-1} = \left[-2(m)-1\right]-\left[-2(m-1)-1\right] = \left[-2m-1\right]-\left[-2m+2-1\right]$$
$$= -2m-1+2m-2+1$$
$$= -2$$

Por consiguiente, la sucesión es aritmética.

c) Se determina la razón o diferencia común:

$$r = a_m - a_{m-1} = \left[\frac{(m)^2+(m)+2}{2}\right]-\left[\frac{(m-1)^2+(m-1)+2}{2}\right] = \left[\frac{m^2+m+2}{2}\right]-\left[\frac{m^2-m+2}{2}\right]$$
$$= \frac{2m}{2}$$
$$= m$$

La diferencia no es constante, entonces la sucesión no es aritmética.

Fórmula para determinar el *n*–ésimo término en una progresión aritmética

Sea la progresión aritmética $\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, con razón r, entonces el n–ésimo término de la sucesión está dado por:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Para todo $n > 1$

Donde:

a_n = n–ésimo término de la progresión

a_1 = primer término de la progresión

n = número de términos en la progresión

r = razón o diferencia común $\rightarrow$ $r = a_n - a_{n-1} = \ldots = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el 8º término de la progresión $\div\, 1, 4, 7, 10, \ldots$

Solución

Se identifica el primer término, el número de términos y la razón para sustituir en la fórmula del n–ésimo término:

$$a_1 = 1,\ \ n = 8\ \ \text{y}\ \ r = 4-1 = 3$$

Por consiguiente:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \quad\rightarrow\quad \begin{aligned} a_8 &= 1+(8-1)(3)\\ a_8 &= 1+(7)(3)\\ a_8 &= 1+21=22 \end{aligned}$$

Entonces, el 8º término de la progresión es 22

2 ¿Cuál es el 7º término en la progresión $\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{7}{6}...$?

Solución

Se determinan los valores de los elementos

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad n = 7 \text{ y } r = \frac{5}{6}-\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$a_n = a_1+(n-1)r \quad\rightarrow\quad \begin{aligned} a_7 &= \frac{1}{2}+(7-1)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}+6\left(\frac{1}{3}\right)\\ a_7 &= \frac{1}{2}+2\\ a_7 &= \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, el 7º término es $\frac{5}{2}$

3 Si en una progresión aritmética el tercer y noveno término son 11 y 35, determina el séptimo término.

Solución

De acuerdo al problema:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + (3-1)\,r \\ a_3 &= a_1 + 2r \\ 11 &= a_1 + 2r \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a_9 &= a_1 + (9-1)\,r \\ a_9 &= a_1 + 8r \\ 35 &= a_1 + 8r \end{aligned}$$

Se genera un sistema de ecuaciones con incógnitas a_1 y r:

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 11 \\ a_1 + 8r = 35 \end{cases}$$

Del cual, al resolverlo, se obtiene que:

$$a_1 = 3 \text{ y } r = 4$$

Luego, el séptimo término es:

$$a_7 = a_1 + (7-1)r = 3 + (6)(4) = 3 + 24 = 27$$

Fórmulas para determinar el primer término, número de términos y la razón

Todas estas fórmulas se deducen de la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$ y dependen de los elementos que se tengan como datos.

- Para encontrar el primer término se despeja a_1:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad\rightarrow\quad a_n - (n-1)r = a_1$$

Por tanto:

$$a_1 = a_n - (n-1)r$$

- Para encontrar la razón se despeja r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_n - a_1 = (n-1)r \quad \rightarrow \quad r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Por consiguiente:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

- Para obtener el número de términos se despeja n:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad \frac{a_n - a_1}{r} = n-1 \quad \rightarrow \quad n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

En consecuencia:

$$n = \frac{a_n - a_1 + r}{r}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el primer término de una progresión aritmética, si se sabe que el 13º término es -28 y la razón es -6.

Solución

Se determinan los valores de los elementos:

$$a_{13} = -28, \; n = 13 \; \text{ y } \; r = -6$$

Al sustituir en la fórmula se obtiene a_1:

$$a_1 = a_{13} - (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_1 = -28 - (13-1)(-6)$$
$$a_1 = -28 - (12)(-6)$$
$$a_1 = -28 + 72$$
$$a_1 = 44$$

Por tanto, el primer término es 44

El procedimiento de los despejes es el mismo si se sustituyen los valores directamente en la fórmula: $a_n = a_1 + (n-1)r$

2 Determina la razón de la progresión aritmética cuyo primer término es 6 y el 16º es 9.

Solución

Se determinan los elementos que se tienen como datos:

$$a_n = a_{16} = 9, \; a_1 = 6 \; \text{ y } \; n = 16$$

Al sustituir en la fórmula y despejar r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad 9 = 6 + (16-1)r$$
$$9 - 6 = (15)r$$
$$r = \frac{9-6}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Finalmente, la razón de la progresión aritmética es $\frac{1}{5}$

3 ¿Cuál es el número de términos que tiene la progresión aritmética $\div$ 4.5, 6.6,…, 25.5?

Solución

Se obtienen los datos:

$$a_1 = 4.5,\ a_n = 25.5 \text{ y } r = 6.6 - 4.5 = 2.1$$

Se sustituyen los valores y se despeja n:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad 25.5 = 4.5 + (n-1)(2.1)$$

$$n = \frac{25.5 - 4.5 + 2.1}{2.1}$$

$$n = \frac{23.1}{2.1} = 11$$

Entonces, la progresión tiene 11 términos.

EJERCICIO 148

Determina cuáles de las siguientes sucesiones son aritméticas:

1. $4, 9, 14, \ldots, 5n - 1$
2. $2, 4, 8, \ldots, 2^n$
3. $\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \ldots, \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{6}\right)$
4. $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$
5. $2, 4, 6, \ldots, 2n$
6. $k + 1, 2k + 3, 3k + 5, \ldots, nk + 2n - 1$

Encuentra el término que se indica para cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

7. El 8º término en: $\div$ 2, 5, 8,...
8. El 11º término en: $\div\ 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$
9. El 15º término en: $\div\ -\frac{3}{4}, -\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{5}{4}, \ldots$
10. El 10º término en: $\div$ 1, 7, 13,…
11. El 16º término en: $\div\ 3, \frac{13}{4}, \frac{7}{2}, \ldots$
12. El 7º término en: $\div$ 120, 108, 96,...
13. El 12º término en: $\div$ 0.5, 0, – 0.5,...
14. El 18º término en: $\div$ –5, 22, 49,...
15. El 13º término en: $\div$ 15, 11.5, 8,...
16. El 17º término en: $\div\ \frac{3}{4}, 0.875, 1, \ldots$

Dados algunos elementos de una progresión aritmética, determina el elemento que se pide:

17. El 1er término si el 13º término es 67 y la razón es 5
18. La razón si el 1er término es 7 y el 10º es – 11
19. El número de elementos de la progresión: $\div$ 120, 519,…, 3 312
20. La razón si el 1er término es $\frac{2}{3}$ y el 8º $-\frac{13}{12}$
21. El 11º término si el 3º es – 4 y el 7º es – 16
22. El 1er término si el 20º es – 62.5 y la razón es – 2.5
23. El número de términos de la progresión: $\div \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \ldots, \frac{11}{8}$
24. El 1er término si el 5º es – 9 y el 9º es – 25
25. El 1er término si el 11º es $-\frac{19}{2}$ y la razón $-\frac{2}{3}$
26. Si la razón es $\frac{1}{25}$ del número de términos y el 1er y último término son: 0.15 y 3.75, respectivamente, determina el número de términos.

27. La razón si el cuarto término es $\frac{1}{4}$ y el 11º es 2
28. El 5º término si el 2º es $-\frac{3}{4}$ y el octavo es $-\frac{27}{4}$
29. El 7º término si el 3ero es $4n-1$ y el 10º es $11n-8$
30. El 4º término si el 8º es $\frac{44n-19}{6}$ y el 15º $\frac{43n-20}{3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma de los *n* primeros términos en una progresión aritmética

Sea la progresión aritmética:

$$\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

Entonces, la suma de los primeros n términos se define como:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Demostración:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S = a_1 + (a_1 + r) + \ldots\ldots + [a_1 + (n-2)r] + [a_1 + (n-1)r]$$

Al cambiar el orden de los términos y realizar una suma vertical, se obtiene:

$$\begin{array}{rl} & S = a_1 + (a_1 + r) + \ldots\ldots\ldots\ldots + [a_1 + (n-2)r] + [a_1 + (n-1)r] \\ + & S = [a_1 + (n-1)r] + [a_1 + (n-2)r] + \ldots\ldots\ldots + [a_1 + r] + a_1 \\ \hline & 2S = \underbrace{[2a_1 + (n-1)r] + [2a_1 + (n-1)r] + \ldots\ldots\ldots + [2a_1 + (n-1)r] + [2a_1 + (n-1)r]}_{n \text{ veces}} \end{array}$$

Por tanto:

$$2S = n\,[2a_1 + (n-1)\,r] \quad \rightarrow \quad S = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)r\right]$$

Además sabemos que $a_n = a_1 + (n-1)r$, entonces:

$$S = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)r\right]$$

Luego, la fórmula para hallar la suma de los primeros n términos está determinada por:

$$S = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma de los primeros 12 términos de la progresión aritmética:

$$\div\, 2, 7, 12, \ldots$$

Solución

En esta progresión los datos son:

$$a_1 = 2,\ n = 12 \text{ y } r = 7 - 2 = 5$$

Por consiguiente, el 12º término es:

$$a_{12} = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a_{12} &= 2 + (12-1)(5) \\ a_{12} &= 2 + (11)(5) \\ a_{12} &= 2 + 55 = 57 \end{aligned}$$

Luego, para encontrar la suma de los 12 términos se sustituyen en la fórmula los siguientes valores:

$$a_1 = 2,\ a_{12} = 57 \text{ y } n = 12$$

Finalmente,

$$S_n = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2} \quad \rightarrow \quad S_{12} = \frac{12\left(2+57\right)}{2} = \frac{12(59)}{2} = 354$$

Entonces, la suma de los 12 términos es: 354

2 Encuentra la suma de los 15 primeros términos de la progresión:

$$\div\ \frac{19}{3},\ \frac{17}{3},\ 5,...$$

Solución

De esta progresión los datos son:

$$a_1 = \frac{19}{3} \quad n = 15 \text{ y } r = \frac{17}{3} - \frac{19}{3} = -\frac{2}{3}$$

Se encuentra el 15º término:

$$a_{15} = a_1 + (n-1)r \quad \rightarrow \quad a_{15} = \frac{19}{3} + (15-1)\left(-\frac{2}{3}\right) \quad \rightarrow \quad a_{15} = \frac{19}{3} + (14)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$a_{15} = \frac{19}{3} - \frac{28}{3} = -3$$

Para encontrar la suma de los 15 términos, se sustituye en la fórmula:

$$a_1 = \frac{19}{3} \qquad n = 15 \qquad a_{15} = -3$$

$$S_n = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2} \quad \rightarrow \quad S_{15} = \frac{15\left(\frac{19}{3} + (-3)\right)}{2} = \frac{15\left(\frac{10}{3}\right)}{2} = 25$$

Entonces, la suma de los 15 primeros términos es 25

EJERCICIO 149

Resuelve los siguientes problemas:

1. ¿Cuál es la suma de los primeros 8 términos de: $\div$ 1, 7, 13,…?
2. Determina la suma de los 9 términos que conforman la progresión: $\div -5,...,7$
3. Encuentra la suma de los primeros 8 términos de: $\div\ 3, \frac{13}{4}, \frac{7}{2},...$
4. ¿Cuál es la suma de los 9 primeros términos de: $\div$ 120, 108, 96,…?
5. Encuentra la suma de los 13 términos de: $\div$ 15, 11.5, 8,...
6. Determina la suma de los 12 primeros términos de la progresión: $\div$ 21, 24, 27…
7. Determina la suma de los 11 primeros términos de: $\div -15, -12, -9,...$
8. ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión: $\div$ 1 000, 988,..., -188?
9. Determina la suma de los términos en la progresión: $\div$ 1, 2, 3,…,n
10. Encuentra la suma de los términos de la progresión: $\div$ 2, 4, 6,…,$2n$

11. ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión: ÷ 1, 3, 5,…, $2n - 1$?

12. ¿Cuál es el número de términos de una progresión aritmética, cuya suma es 42. Si el último término es 31 y la razón es 5?

13. Determina el número de términos de una progresión aritmética, cuya suma es $\frac{65}{4}$, si el primer término es $\frac{1}{2}$ y la razón $\frac{1}{4}$.

14. La suma de 32 elementos en una progresión aritmética es 1 200. Si la razón es 3, determina el primer término.

15. La suma de 50 términos de una progresión aritmética es 2 550. Si la razón es 2, ¿cuál es el primer y último término de la progresión?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Un constructor apila cierto número de bloques de granito de la siguiente manera: 15 bloques en la base y 2 menos en cada fila superior a la anterior. Si en la última fila superior colocó 1, encuentra el total de bloques que apiló.

Solución

El problema indica que el primer término de la progresión aritmética es 15, y que al disminuir de 2 bloques por fila, resulta:

$$\div 15, 13, 11,...$$

Los datos conocidos son: $a_1 = 15$, $r = -2$ y $a_n = 1$, entonces se debe de calcular el número de filas que se pueden apilar.

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1 \qquad\qquad n = \frac{1-15}{-2} + 1 = 7 + 1 = 8$$

Luego, la suma está determinada por:

$$S_n = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2} \qquad\qquad S_8 = \frac{8\left(15+1\right)}{2} = \frac{128}{2} = 64$$

Entonces, el constructor apiló 64 bloques de granito.

EJERCICIO 150

1. El estacionamiento de un centro comercial tiene la siguiente disposición de lugares: la primera fila tiene 50, la segunda 47, y cada fila subsiguiente tiene 3 menos que la anterior. Si la última fila tiene 23 lugares, ¿de cuántos lugares dispone el estacionamiento?

2. Un albañil apilará ladrillos de tal forma que la base tenga 50, la segunda capa 48, la tercera 46, y así sucesivamente hasta que la capa superior tenga 24, ¿cuántos ladrillos en total apilará el albañil?

3. Una empresa va a repartir entre 18 de sus empleados $13 275, como bono de puntualidad. Si la diferencia entre cada uno de los bonos es de $75, determina cuánto recibió el trabajador más puntual.

4. Se apilan 135 rollos de tela de tal manera que la base tendrá el doble de rollos que la última, y la diferencia de rollos entre cada una de las capas será de 1. ¿Cuántos rollos debe tener la última capa?

5. Se van a colocar en filas los asientos para un auditorio, de tal manera que la primera tenga 20, la segunda 23, la tercera 26 y así sucesivamente. Si en total se colocaron 819 asientos, ¿cuántas filas se formaron?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Interpolación de medios aritméticos

Los medios aritméticos son los términos que se encuentran entre el primer y el último término, y dependen directamente del valor de la razón.

La interpolación de medios aritméticos consiste en encontrar los términos de toda la progresión a partir de conocer el primer y último término.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Interpola 4 medios aritméticos entre 5 y 32.5.

Solución

En esta progresión los elementos dados son:

$$a_1 = 5 \text{ y } a_n = 32.5$$

Para encontrar el número de términos es necesario sumar los medios aritméticos más 2 (primer y último término), entonces:

$$n = 6$$

Con los datos anteriores se encuentra la razón:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{32.5 - 5}{6-1}$$

$$r = \frac{27.5}{5}$$

$$r = 5.5$$

Por tanto, la progresión está determinada por:

$$\div\, 5, (5 + 5.5), (10.5 + 5.5), (16 + 5.5), (21.5 + 5.5), 32.5$$
$$\div\, 5, \quad 10.5, \quad 16, \quad 21.5, \quad 27, \quad 32.5$$

Y los 4 medios aritméticos son:

$$10.5, 16, 21.5, 27$$

2 Interpola 5 medios aritméticos entre 11 y – 13.

Solución

Los términos dados son,

$$a_1 = 11,\ a_n = -13 \text{ y } n = 7$$

Se obtiene la razón,

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{-13-11}{7-1} = \frac{-24}{6} = -4$$

Por consiguiente, los medios aritméticos son:

$$7, 3, -1, -5, -9$$

Media aritmética o promedio aritmético

- Sean los números x_1 y x_2, entonces la media aritmética o promedio aritmético se define por:

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

- Sea el conjunto de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, en consecuencia la media aritmética o promedio aritmético se determina así:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el grupo de danza se inscribieron 9 alumnos, cuyas edades son: 12, 13, 13, 14, 15, 12, 14, 15, 11. Determina la edad promedio del grupo.

Solución

Se suman todas las edades y el resultado se divide entre el número de éstas, entonces:

$$\text{Edad promedio} = \frac{12+13+13+14+15+12+14+15+11}{9} = 13.2$$

Por tanto, la edad promedio es de 13.2 años.

2 Un alumno tiene en sus 4 primeras evaluaciones las siguientes calificaciones: 7.6, 9, 8.4 y 7.8. ¿Qué calificación necesita tener en la quinta evaluación para exentar la materia con 8?

Solución

Sea x la quinta evaluación y el promedio 8, entonces:

$$\text{Promedio} = \frac{\text{suma de las evaluaciones}}{\text{total de evaluaciones}} \qquad 8 = \frac{7.6+9+8.4+7.8+x}{5}$$

Al despejar x de la expresión se obtiene:

$$\begin{aligned} 5(8) - (7.6 + 9 + 8.4 + 7.8) &= x \\ 40 - 32.8 &= x \\ 7.2 &= x \end{aligned}$$

Por consiguiente, la calificación mínima que necesita para exentar es 7.2

EJERCICIO 151

Resuelve los siguientes problemas:

1. Interpola 5 medios aritméticos en la progresión, cuyo primer y último término son: 21 y 60.
2. Interpola 7 medios aritméticos en la progresión, cuyos extremos son: 5 y 17.
3. Interpola 6 medios aritméticos entre $\frac{2}{3}$ y 3.
4. Interpola 7 medios aritméticos entre 0.5 y $8\frac{1}{2}$.
5. Interpola 6 medios aritméticos entre -3 y 0.5.
6. Interpola 3 medios aritméticos entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{7}{3}$.
7. ¿Cuál es el promedio de un alumno cuyas calificaciones son: 6, 9, 8.4, 7.8 y 10?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

La compañía de dulces La Pasita compró una máquina registradora a un precio de \$12 000. Al cabo de 6 años la vendió en \$5 520. La depreciación anual es constante, calcula el valor de la registradora al final de cada año.

Solución

Ésta es una progresión aritmética, cuyos precios inicial y final son: \$12 000 y \$5 520 respectivamente, entonces, se deben interpolar 5 periodos (años).

En consecuencia:

$$a_1 = 12\,000, \quad a_n = 5\,520 \;\text{ y }\; n = 7$$

Se encuentra la depreciación anual (razón):

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} \qquad \rightarrow \qquad r = \frac{5\,520 - 12\,000}{7-1} = \frac{-6\,480}{6} = -1\,080$$

El signo negativo indica que el costo de la máquina va a disminuir \$1 080 por año.

Por tanto, el valor de la máquina al final de cada año es:

1^{er} año: \$ 10 920	4^{o} año: \$ 7 680
2^{o} año: \$ 9 840	5^{o} año: \$ 6 600
3^{er} año: \$ 8 760	6^{o} año: \$ 5 520

EJERCICIO **152**

1. En un salón de clases de 15 alumnos la edad promedio es 7.8; 9 de ellos tienen 8 años; la edad de otros 3 es 7. ¿Cuál es la edad de los restantes si tienen los mismos años?
2. ¿Cuál es la calificación que debe obtener un alumno en el cuarto bimestre para exentar con 8.5 la materia de biología, si en los 3 primeros bimestres obtuvo las siguientes evaluaciones: 8.7, 7.9 y 7.6?
3. Determina el promedio de una progresión aritmética que se conforma de ocho términos, su primer término es 2 y el último 16.
4. Obtén la media aritmética de la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.
5. El lado norte del tejado de una casa lo forman 476 tejas, ordenadas de tal forma que la primera hilera tiene 80 y la última 56. Determina el número de hileras y el de tejas que contiene cada hilera.
6. Si el lado norte de un tejado consta de x menos 50 hileras, y x es el número de tejas que tiene la primera hilera. Si las hileras subsecuentes exceden en 4 tejas a la anterior, y el total de tejas utilizadas es de 576, determina el número de hileras y mediante una interpolación precisa el número de tejas de cada hilera.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Progresión geométrica o sucesión geométrica

A la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, se le llama sucesión o progresión geométrica, si para todo a_m que pertenezca a la sucesión existe una constante r diferente de cero, tal que:

$$a_{m+1} = a_m\, r$$

Donde la razón común es $r = \dfrac{a_{m+1}}{a_m}$ y se denota con el símbolo ÷÷

Ejemplos

Determina cuál de las siguientes sucesiones es geométrica.

a) $3, 6, \; 3\cdot 2^{n-1}$

b) $\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots, \frac{1}{3^{n+1}}$

c) $1, 4, 7, \ldots, 3n-2$

Solución

a) Se obtiene la razón común:

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{3\cdot 2^{(m+1)-1}}{3\cdot 2^{m-1}} = \frac{3\cdot 2^{m}}{3\cdot 2^{m-1}} = 2$$

Se observa que los elementos de la progresión: $3, 6, 12, \ldots, \; 3\cdot 2^{n-1}$ se obtienen al multiplicar por 2 el término que le precede, por tanto la progresión es geométrica.

b) Se determina la razón común para la comprobación:

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{\frac{1}{3^{(m+1)+1}}}{\frac{1}{3^{m+1}}} = \frac{\frac{1}{3^{m+2}}}{\frac{1}{3^{m+1}}} = \frac{3^{m+1}}{3^{m+2}} = \frac{1}{3}$$

Significa que los términos subsecuentes de la progresión: $\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots, \frac{1}{3^{n+1}}$ se obtienen al multiplicar por $\frac{1}{3}$ entonces se deduce que es progresión geométrica.

c) Al obtener la razón de la progresión:

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{3(m+1)-2}{3(m)-2} = \frac{3m+3-2}{3m-2} = \frac{3m+1}{3m-2}$$

La progresión no es geométrica, ya que los términos siguientes no se pueden obtener al multiplicar por la razón resultante.

Fórmula para obtener el *n*–ésimo término en una progresión geométrica

Sea la progresión geométrica $\div\div\; a_1\, a_2, a_3, \ldots, a_n$ y razón común r, entonces el n–ésimo término se define como:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Donde:

a_n = n–ésimo término	r = razón de la progresión
a_1 = primer término	n = número de términos de la progresión

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el 9º término de la progresión $\div\div 10, 20, 40, \ldots$

Solución

Se obtiene la razón al dividir uno de los elementos entre su antecesor:

$$r = \frac{40}{20} = \frac{20}{10} = 2$$

Entonces, los elementos dados son:

$$a_1 = 10, r = 2 \text{ y } n = 9$$

Al sustituir, se obtiene el 9º término:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_9 = 10(2)^{9-1} = 10(2)^8$$
$$a_9 = 10(256)$$
$$a_9 = 2\,560$$

Finalmente, el 9º término es 2 560

2 Determina el 7º término de ∺200, 100, 50,...

Solución

De la progresión se tienen como datos:

$$a_1 = 200, r = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \text{ y } n = 7$$

Luego, para encontrar el 7º término se sustituye en la fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_7 = (200)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7-1}$$
$$a_7 = (200)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$
$$a_7 = (200)\cdot\left(\frac{1}{64}\right) = \frac{200}{64} = \frac{25}{8}$$

Entonces, el 7º término es $\frac{25}{8}$

3 Si en una progresión geométrica el 3er y 7º términos son 18 y 1 458, ¿cuál es el 5º término?

Solución

De acuerdo con el problema

$$a_3 = a_1 r^{3-1} \qquad a_7 = a_1 r^{7-1}$$
$$18 = a_1 r^2 \qquad 1458 = a_1 r^6$$

Se obtienen las ecuaciones:

$$a_1 r^2 = 18 \quad \text{y} \quad a_1 r^6 = 1458$$

Pero $a_1 r^6 = a_1 r^2 \cdot r^4 = 18r^4$, entonces

$$18r^4 = 1\,458 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[4]{\frac{1458}{18}} \quad \rightarrow \quad r = 3$$

Al sustituir este valor, se obtiene a_1:

$$a_1(3)^2 = 18 \rightarrow a_1 = \frac{18}{9} = 2$$

En consecuencia, el 5º término es:

$$a_5 = a_1 r^4 = (2)(3)^4 = (2)(81) = 162$$

Fórmulas para obtener el 1er término, número de términos y la razón

Todas las fórmulas subsecuentes se obtienen de $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

- Para encontrar el 1er término:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

- Para encontrar la razón:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad r^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

- Para determinar el número de términos que contiene la progresión geométrica:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad n = \frac{\log a_n - \log a_1 + \log r}{\log r}$$

Estas fórmulas se aplican, según las necesidades de los ejercicios que se deben resolver, como se ejemplifica a continuación:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En una progresión geométrica la razón es $\frac{1}{2}$ y el 8^{o} término es $\frac{1}{8}$. Calcula el 1er término.

Solución

Los datos en este problema son:

$$a_8 = \frac{1}{8} \qquad n = 8 \qquad r = \frac{1}{2}$$

Entonces, al sustituir los valores en nuestra fórmula, se obtiene:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{\frac{1}{8}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{128}} = \frac{128}{8} = 16$$

Por tanto, el 1er término de la progresión es 16

2 ¿Cuál es la razón de la progresión geométrica, cuyo 1er y 7^{o} término es $\frac{1}{5}$ y 3 125 respectivamente?

Solución

Los elementos que se tienen como datos son:

$$a_1 = \frac{1}{5} \qquad a_7 = 3\,125 \qquad n = 7$$

Luego, al sustituir en nuestra fórmula se obtiene el valor de la razón, entonces:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[7-1]{\frac{3125}{\frac{1}{5}}} = \sqrt[6]{15\,625} = 5$$

Finalmente, la razón de la progresión es 5

3 ¿De cuántos términos está formada la siguiente progresión geométrica?

$$\div\div\ 1, 2, \ldots, 512$$

Solución

De la progresión se tiene:

$$a_1 = 1 \qquad a_n = 512 \qquad r = \frac{2}{1} = 2$$

Se sustituyen los valores para obtener el número de términos.

$$n = \frac{\log\ (512) - \log\ (1) + \log\ (2)}{\log(2)} = \frac{2.7092 - 0 + .3010}{.3010} = 10$$

El número de términos de la progresión geométrica es 10

EJERCICIO 153

De las siguientes sucesiones determina cuál es geométrica:

1. $1, 2, 4, \ldots,\ 2^{n-1}$
2. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{3^{n-2}}{2^{n-1}}$
3. $1, 2, 6, \ldots, n!$
4. $-4, -2, 0, \ldots, 2n-6$
5. $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, n^3$
6. $3, 6, 12, \ldots, 3\cdot 2^{n-1}$

Determina el término que se indica en cada una de las siguientes progresiones geométricas:

7. El 6º término de $\div\div \frac{1}{3}, -1, 3, \ldots$
8. El 9º término de $\div\div \frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \ldots$
9. El 5º término de $\div\div -5, 10, -20, \ldots$
10. El 7º término de $\div\div 2.5, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$
11. El 10º término de $\div\div -9, -3, -1, \ldots$
12. El 8º término de $\div\div 8, 4, 2, \ldots$
13. El 12º término de $\div\div \frac{729}{64}, \frac{243}{32}, \frac{81}{16}, \ldots$
14. El 9º término de $\div\div 1, -m^3, m^6, \ldots$
15. El 10º término de $\div\div n^{-4}, n^{-2}, 1, \ldots$
16. El 7º término de $\div\div \frac{(n+1)^5}{n^3}, \frac{(n+1)^4}{n^2}, \ldots$
17. El 13º término de $\div\div 2^{3x-4}, 2^{5x-5}, 2^{7x-6}, \ldots$
18. El 9º término de $\div\div a_1, a_1r^2, a_1r^4, \ldots$

Dados algunos elementos de una progresión geométrica, halla el elemento que se pide:

19. El 1er término, si la razón es $\frac{1}{2}$ y el 6º término es $\frac{1}{16}$
20. El 2º término, si su razón es -2 y el 7º es -128
21. La razón, si el 1er término es $\frac{3}{5}$ y el 5º es $\frac{1}{135}$
22. La razón, si el 1er término es -8 y el 7º es $-\frac{729}{512}$
23. El número de términos de $\div\div -2, -6, \ldots, -162$
24. El número de términos si la razón es $\frac{2}{5}$, el 1er término es $\frac{1}{2}$ y el último $\frac{64}{78\,125}$
25. El número de términos de $\div\div 5^x, 5^{2x+1}, \ldots, 5^{9x+8}$

26. El 1^er^ término si el 4º es $\frac{2}{27}$ y el 7º $\frac{16}{729}$
27. El 4º término si el 2º es 1 y el 9º es $\frac{1}{m^{14}}$
28. El 11º término si el 3º es $2^{\frac{7}{6}x-1}$ y el 9º es $2^{\frac{19}{6}x-7}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Un cultivo de 20 000 bacterias aumenta su población 25% por hora. ¿Cuántas bacterias se generan en la sexta hora?

Solución

El cultivo es el 100% inicial de bacterias, a la primera hora aumenta 25%, esto indica que el porcentaje actual es 125% o $\frac{5}{4}$ de la cantidad inicial; luego, el número de elementos que conforman la sucesión es el término inicial más los 6 términos siguientes.

De acuerdo con los datos:

$$a_1 = 20\,000,\ r = \frac{5}{4}\ \text{y}\ n = 7$$

Al sustituir en la fórmula para obtener el n–ésimo término:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad a_7 = 20\,000\left(\frac{5}{4}\right)^{7-1} = 76\,293.9 \approx 76\,294$$

Por tanto, al cabo de 6 horas habrá aproximadamente 76 294 bacterias.

EJERCICIO 154

1. Determina la sucesión de 4 términos, cuyo primer y cuarto término sea 9 y – 1, de tal manera que los tres primeros números formen una progresión geométrica y los últimos 3, una progresión aritmética.
2. Una generación celular es la división de una célula en 2. Si se tienen 8 células iniciales, ¿cuántas células se han generado tras 10 generaciones celulares?
3. Tres números forman una progresión aritmética con una razón de 2. Si el segundo número se incrementa en 1 y el tercero en 5, los números resultantes forman una progresión geométrica. Determina los números de la progresión aritmética
4. Determina el número de células iniciales si se obtuvieron 98 304 después de 14 generaciones celulares.
5. Un cultivo de 25 000 bacterias aumenta 5% en 20 minutos. ¿Cuál será la población de bacterias al transcurrir una hora 20 minutos?
6. Del problema anterior establece la fórmula general que determina el número de bacterias en t horas.
7. Se invierten $230 000 a una cuenta que da por concepto de intereses 5% anual. ¿Cuánto se tendrá al final de 8 años?
8. En cierta ciudad nacieron 32 500 bebés en el año 2005, si el número de nacimientos se incrementa 20% anual, ¿cuántos bebés se estima que nazcan en el año 2009?
9. Se tiene un cuadrado de área 1 024 cm^2 y se inscribe otro cuadrado de tal manera que los extremos coincidan con los puntos medios del primero; después se inscribe otro cuadrado en el segundo con la misma disposición. Si se conoce que el área de un cuadrado inscrito es la mitad del área del cuadrado en el que se inscribe, ¿cuál es el área del noveno cuadrado inscrito?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica

Deducción de la fórmula.

Sea la progresión geométrica $\div\div a_1, a_2, a_3,..., a_n$, llamemos S a la suma de los primeros n términos, entonces:

$$S=\sum_{j=1}^{n}a_j = a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_n \qquad \rightarrow \qquad (1)$$

Al multiplicar por la razón la igualdad:

$$S\cdot r = a_1\cdot r + a_2\cdot r + a_3\cdot r + \ldots\ldots\ldots\ldots a_n\cdot r \qquad \rightarrow \qquad (2)$$

Al restar a la ecuación 2 la ecuación 1, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} S\cdot r &=& \quad a_1\cdot r + a_2\cdot r + a_3\cdot r + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n\cdot r \\ -S &=& -a_1 - a_1\cdot r - a_2\cdot r\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; -a_{n-1}\cdot r \\ \hline S\cdot r - S &=& a_n\cdot r - a_1 \end{array}$$

Entonces:

$$S(r-1) = a_n\cdot r - a_1 \quad \text{pero} \quad a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$S(r-1) = a_1 r^{n-1}\cdot r - a_1$$

$$S(r-1) = a_1 r^{n} - a_1$$

Finalmente:

$$S=\frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1} \quad \text{o} \quad S = a_1\frac{\left(r^n-1\right)}{r-1} = a_1\frac{\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la suma de los primeros 8 términos de la progresión geométrica:

$$\div\div \frac{4}{3}, 2, 3, \ldots$$

Solución

En esta progresión los datos son:

$$a_1 = \frac{4}{3} \qquad r = \frac{3}{2} \qquad n = 8$$

Luego, al sustituir en la fórmula se obtiene la suma de los 8 términos:

$$S = \frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)\left[\left(\frac{3}{2}\right)^8-1\right]}{\frac{3}{2}-1} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{6\,561}{256}-1\right)}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{6\,305}{256}\right) = \frac{6\,305}{96}$$

Se concluye que la suma de los primeros 8 términos de la progresión es $\frac{6\,305}{96}$

2 Encuentra el 1^er^ término de una progresión geométrica, cuya suma de los primeros 10 términos es 341 y la razón es – 2.

Solución

De acuerdo al problema los datos son:

$$n = 10,\ r = -2 \ \text{ y } \ S = 341$$

Al sustituir en la fórmula y despejar a_1 se obtiene:

$$S = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1} \qquad 341 = \frac{a_1\left[(-2)^{10} - 1\right]}{-2-1}$$

Se simplifica la expresión y se despeja a_1:

$$341 = \frac{a_1\left[(-2)^{10} - 1\right]}{-3} \qquad 341 = \frac{a_1\left[1024 - 1\right]}{-3} \qquad a_1 = \frac{(-3)(341)}{1023} = \frac{-1023}{1023} = -1$$

Por tanto, el 1^er^ término de la progresión es – 1

3 Determina el número de elementos de una progresión geométrica, cuya suma es 1093, su 1^er^ término es 1 y la razón es 3.

Solución

De acuerdo con el problema:

$$a_1 = 1,\ r = 3 \ \text{ y } S = 1\,093$$

Al sustituir en la fórmula de la suma de términos:

$$S = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1} \qquad 1\,093 = \frac{1\left(3^n - 1\right)}{3-1}$$

Al simplificar y despejar n se obtiene:

$$1\,093 = \frac{3^n - 1}{2} \qquad 2\,186 = 3^n - 1 \qquad 2\,187 = 3^n \qquad (3)^7 = 3^n$$

$$7 = n$$

Por consiguiente, se realizó la suma de los primeros 7 términos de la progresión.

EJERCICIO **155**

Encuentra la suma de los primeros términos que se indican en las siguientes progresiones geométricas:

1. Seis términos de $\div\div\ -9\ ,\ -3\ ,\ -1\ , ...$
2. Siete términos de $\div\div\ \frac{3}{2}\ ,\ 1\ ,\ \frac{2}{3}\ , ...$
3. Nueve términos de $\div\div\ -5\ , 10\ ,\ -20\ , ...$
4. Diez términos de $\div\div$ 9, 12, 16,…
5. Quince términos de $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, ...$
6. Dieciocho términos de $\div\div$ 2, 4, 8,…

7. Doce términos de $\div\div\ \sqrt{3}, 3, \sqrt{27},...$

8. Diez términos de $\div\div\ 1, -\sqrt{2}, 2,\ldots$

9. Veinte términos de $\div\div\ n, n^2, n^3,\ldots$

10. Nueve términos de $\div\div\ 2^{x-2}, 2^{x-1}, 2^x,\ldots$

11. n términos de $\div\div\ a_1, a_1r^2, a_1r^4,\ldots$

12. n términos de $\div\div\ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},...$

Resuelve los siguientes problemas:

13. Encuentra el número de términos de una progresión geométrica; si la suma es 255, el 1er término es -3 y la razón -2.

14. Determina la razón común de una progresión geométrica si el 1er término es -8 y el 6o término $-\frac{1}{4}$.

15. ¿Cuál es el 1er término de una progresión geométrica, cuya suma de los primeros 8 términos es $\frac{6305}{81}$ y la razón es $\frac{2}{3}$?

16. ¿Cuál es el último término de una progresión geométrica cuya suma es $\frac{31}{64}$, su 1er término es $\frac{1}{4}$ y la razón $\frac{1}{2}$?

17. Determina el 1er término de una progresión geométrica si la suma de los primeros 6 términos es 364 y la razón es -3.

18. ¿Cuál es la razón de una progresión geométrica, si la suma es $\frac{211}{24}$, el 1er término es $\frac{2}{3}$ y el último término es $\frac{27}{8}$?

19. Encuentra el número de términos de una progresión geométrica, si la suma es $\frac{1-x^7}{x^4-x^5}$, el 1er término es x^2 y la razón es $\frac{1}{x}$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una compañía de autos tiene estimado vender 5000 autos en 2010 y durante los 10 años siguientes incrementar en 5% anual las ventas con respecto al año anterior. Determina cuántos automóviles pretende vender la compañía en ese periodo.

Solución

De acuerdo con el problema los datos son:

$$a_1 = 5000,\ r = 100\% + 5\% = 105\% = 1.05$$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_{10} = 5\,000\left(\frac{1-1.05^{10}}{1-1.05}\right)$$

$$= 5\,000\ (12.5778)$$

$$= 62\,889.46 \approx 62\,890 \text{ autos}$$

Por consiguiente la compañía pretende vender aproximadamente 62 890 autos en los siguientes 10 años.

2 Una epidemia ataca a 2 500 habitantes de una población en 2006, y por cada año que transcurre la clínica de salud de la entidad observa que las personas que padecen la enfermedad se incrementa en un 5% ¿Cuántos habitantes habrán padecido la enfermedad para el año 2010?

Solución

De acuerdo al problema, los datos son los siguientes:

$$a_1 = 2\,500,\ r = 105\% = 1.05 \text{ y } n = 5$$

Sustituyendo en la fórmula, se obtiene:

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

$$S_n = \frac{2\,500\left(1-1.05^5\right)}{1-1.05}$$

$$= \frac{2\,500\left(1-1.2762\right)}{-0.05} = \frac{2\,500\left(-0.2762\right)}{-0.05} = 13\,814 \text{ habitantes}$$

Por tanto, para el año 2010 habrán padecido la epidemia 13 814 habitantes aproximadamente.

EJERCICIO 156

1. Un triángulo equilátero se divide en 4 triángulos equiláteros más pequeños de igual área, éstos a su vez se dividen en otros 4 triángulos cada uno; este procedimiento se repite para cada triángulo resultante. ¿Cuántos triángulos se tendrán en total después de realizar 6 veces esta operación?
2. Carolina tiene papá y mamá, a su vez éstos tienen cada uno a su padre y madre, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas en el árbol genealógico de Carolina existen hasta 7 generaciones atrás, incluyéndola a ella?
3. En cierta población la producción de maíz en el año 2001 fue de 20 000 toneladas; por diversas cuestiones esa cantidad ha tenido una disminución de 25% anual. ¿Qué cantidad de maíz se produjo desde 2001 hasta 2006?
4. Durante el año 2005 cierto hospital atendió 5 110 partos; sin embargo, este número se incrementó 10% anual. ¿Cuántos partos estima el hospital atender desde 2006 hasta el año 2010?
5. La población en México en el año 2000 está cuantificada en 100 millones de personas. Si para el año 2002 las autoridades registraron 104 millones de mexicanos, ¿a qué ritmo está creciendo la población en nuestro país? Si se mantiene este crecimiento, para el año 2010 ¿cuántos habitantes tendrá el territorio mexicano?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Progresión geométrica infinita

Sea una progresión geométrica, cuyo 1^er^ valor es $a_1 = 100$ y la razón $r = \frac{1}{2}$, ¿qué le sucede a la suma de los primeros n términos?

El comportamiento de la progresión:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$$

Para $a_1 = 100$ y $r = \frac{1}{2}$ se obtiene:

$$S_n = 2a_1 - 2a_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_3 = 200 - 200\left(\frac{1}{8}\right) \qquad \text{si } n = 3$$

$$S_8 = 200 - 200\left(\frac{1}{256}\right) \qquad \text{si } n = 8$$

$$\approx$$

$$S_{20} = 200 - 200\left(\frac{1}{1\,048\,576}\right) \qquad \text{si } n = 20$$

De manera que, conforme n crece, el término $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se hace más pequeño y tiende a cero.

Es por eso que para cualquier progresión geométrica infinita, donde la razón es menor que la unidad, se debe considerar la suma de los primeros n términos igual a:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \quad \forall \ |r| < 1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Determina la suma de la progresión geométrica infinita: 9, 3, 1,...

Solución

Los datos proporcionados por la progresión son $a_1 = 9$, $r = \frac{1}{3}$

Como la razón $|r| < 1$ entonces se utiliza:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \qquad \rightarrow \qquad S_n = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{2}$$

En consecuencia, la suma de términos de la progresión geométrica infinita es: $\frac{27}{2}$

2. Obtén la razón de una progresión geométrica infinita si el 1er término es 4 y la suma es 8.

Solución

De acuerdo al problema, los datos son:

$$a_1 = 4, \ S_n = 8$$

Al sustituir en la fórmula de la suma de una progresión infinita:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \qquad 8 = \frac{4}{1-r}$$

Al despejar r de la ecuación se obtiene:

$$8(1-r) = 4 \qquad 8 - 8r = 4 \qquad -8r = -4 \qquad r = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 157

Realiza lo siguiente:

1. Encuentra la suma infinita de términos de la progresión $\div\div -6, 3, \frac{-3}{2}, ...$

2. Determina la suma de términos de la progresión infinita $\div\div \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$

3. ¿Cuál es el valor de la suma infinita de términos de la progresión $\div\div$ 6, 2, $\frac{2}{3}$,...?

4. ¿Cuál es el valor de la suma de términos de la progresión infinita $\div\div$ $\frac{9}{4}$, $\frac{3}{2}$, 1,...?

5. La suma de términos de una progresión infinita es 3 y la razón es $\frac{1}{24}$. Determina el 1er término de la progresión.

6. El 1er término de una progresión infinita es $2\sqrt{3}$ y la suma de los términos es $5\sqrt{3}$. Encuentra la razón.

7. El 1er término de una progresión infinita es $\frac{a}{b}$ con $b > a$ y $a, b \in N$ y la suma es $\frac{3a}{2b}$. ¿Cuál es la razón de la progresión?

8. Un triángulo equilátero de área 1 cm^2 se divide en 4 triángulos equiláteros más pequeños de área $\frac{1}{4}$ cm^2, a su vez, uno de los 4 triángulos se divide nuevamente en otros 4 triángulos de $\frac{1}{16}cm^2$, y se repite el procedimiento sucesivamente con 1 de los 4 triángulos resultantes. ¿Cuál es el resultado de la suma de las áreas de los triángulos?

9. Se tiene un cuadrado de área 1 024 cm^2 y se inscribe otro cuadrado, de tal manera que los vértices extremos coincidan con los puntos medios del primero, y así sucesivamente. Si ya se conoce que el área de un cuadrado es el doble del que se inscribe, determina la suma de las áreas de todos los cuadrados que se pueden inscribir de esa manera.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Interpolación de medios geométricos

La interpolación de medios geométricos consiste en encontrar un cierto número de términos, entre el 1º y último, para formar una progresión geométrica.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Interpola 4 medios geométricos en la progresión $\div\div$ – 3,..., 96.

Solución

Al interpolar 4 medios geométricos, la progresión estará formada por 6 términos, entonces:

$$a_1 = -3,\ n = 6 \text{ y } a_6 = 96$$

Se procede a calcular la razón, a partir de:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \qquad \rightarrow \qquad r = \sqrt[6-1]{\frac{96}{-3}} = \sqrt[5]{-32} = -2$$

Por tanto, la progresión queda como a continuación se muestra:

$$-3,\quad -2(-3),\quad -2(6),\quad -2(-12),\quad -2(24),\quad -2(-48)$$

$$-3,\quad 6,\quad -12,\quad 24,\quad -48,\quad 96$$

Los medios geométricos son:

$$6,\ -12,\ 24,\ -48$$

2 Interpola 5 medios geométricos en la siguiente progresión: $\div\div$ 16,..., $\frac{1}{256}$.

Solución

Los datos de la progresión son: $a_1 = 16$, $a_7 = \frac{1}{256}$ y $n = 7$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \qquad \rightarrow \qquad r = \sqrt[7-1]{\frac{\frac{1}{256}}{16}} = \sqrt[6]{\frac{1}{4\,096}} = \frac{1}{4}$$

La progresión que resulta es:

$$16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$$

Por consiguiente, los 5 medios geométricos son:

$$4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}$$

Media geométrica

- Sean los números x_1 y x_2, entonces su media geométrica se define por:

$$\sqrt{x_1 x_2} \text{ si } x_1 \text{ y } x_2 \text{ son positivos}$$

$$-\sqrt{x_1 x_2} \text{ si } x_1 \text{ y } x_2 \text{ son negativos}$$

- Sean los números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, entonces, su media geométrica se define como:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la media geométrica de 12 y 48.

Solución

Se busca un término que forme una progresión geométrica con los elementos dados, entonces al aplicar la fórmula:

$$\text{Media geométrica} = \sqrt{(12)(48)} = \sqrt{576} = 24$$

Esto indica que la progresión geométrica formada es:

12, 24, 48

Y se comprueba con la razón:

$$r = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = 2$$

Por tanto, la media geométrica es 24

2 Encuentra la media geométrica de los números 3, 9, 27 y 81.

Solución

Se aplica la fórmula:

$$\text{Media geométrica} = \sqrt[4]{(3)(9)(27)(81)}$$

Al simplificar la raíz se obtiene:

$$\sqrt[4]{3^{10}} = \sqrt[4]{3^8 \cdot 3^2} = \sqrt[4]{3^8} \cdot \sqrt[4]{3^2} = 3^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

Finalmente, la media geométrica es: $9\sqrt{3}$

EJERCICIO 158

Realiza la interpolación de los medios geométricos que se indican:

1. Cinco medias geométricas entre $\frac{1}{2}$ y 32.
2. Tres medias geométricas entre 12 y $\frac{4}{27}$.
3. Cuatro medias geométricas entre -3 y -96.
4. Cinco medias geométricas entre $1\frac{1}{2}$ y 6 144.
5. Tres medias geométricas entre $2\sqrt{3}$ y $18\sqrt{3}$.
6. Cuatro medias geométricas entre $\frac{1}{2}$ y $2\frac{26}{243}$.
7. Seis medias geométricas entre -128 y -1
8. Tres medias geométricas entre $(x-1)^2$ y $\frac{(x-1)^6}{81}$.
9. Tres medias geométricas entre $\frac{a^2}{2}$ y $\frac{8}{a^2}$.
10. Cuatro medias geométricas entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y 4.

Determina la media geométrica de los siguientes números:

11. 6 y 9
12. -4 y -8
13. 5 y 25
14. 9 y 16
15. 2, 3 y 6
16. 4, 8 y 32
17. 1, 3, 9 y 27
18. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{16}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Interés compuesto

Una de las aplicaciones más importantes de las progresiones geométricas es el interés compuesto, por su constante uso en la economía y la administración.

Considera un capital inicial de \$100, que se invierte en una tasa fija de 10% de interés anual compuesto. Calcula el interés compuesto por periodo en los primeros 5 años.

$M_1 = 100(1 + 0.1) = 110$ primer año

$M_2 = 110(1 + 0.1) = 121$ segundo año

$M_3 = 121(1 + 0.1) = 133.1$ tercer año

$M_4 = 133.1(1 + 0.1) = 146.41$ cuarto año

$M_5 = 146.41(1 + 0.1) = 161.051$ quinto año

Ahora bien, si se desea calcular el monto que genera un capital en determinado tiempo, con una tasa de interés fija, se utiliza:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

Donde:

M = monto generado

C = capital inicial

i = tasa de interés porcentual anual

n = número de capitalizaciones al año

t = tiempo que se invierte el capital

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Un ama de casa ahorra en un banco \$5 000, la institución bancaria le da un interés anual de 6%. Calcula el monto que obtendrá en 12 años.

Solución

Los datos de este problema son los siguientes:

$C = \$5\,000$ $i = 6\%$ anual $n = 1$ periodo $t = 12$ años

Entonces, al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} \quad \rightarrow \quad M = 5\,000\left(1 + \frac{0.06}{1}\right)^{(1)(12)}$$

$$M = 5\,000\,(1.06)^{12}$$

$$M = 10\,060.98$$

Por tanto, esa ama de casa recibirá después de 12 años la cantidad de \$10 060.98

2 Fernando invierte \$3 000 en un negocio que le dará 10% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente. ¿Cuál será el monto que recibirá al cabo de 5 años?

Solución

Los datos de este problema son los siguientes:

$C = \$3\,000$ $i = 10\%$ anual $n = 2$ periodos $t = 5$ años

Entonces, al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} \quad \rightarrow \quad M = 3\,000\left(1 + \frac{0.10}{2}\right)^{(2)(5)}$$

$$M = 3\,000\,(1.05)^{10}$$

$$M = 4\,886.68$$

Finalmente, Fernando recibirá después de 5 años la cantidad de \$4 886.68

3 Calcula el tiempo para duplicar una inversión de 10% de interés anual capitalizable trimestralmente.

Solución

Si se quiere duplicar el capital, esto indica que $M = 2C$, luego la inversión es capitalizable trimestralmente ($n = 4$), por tanto:

$$M = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} \quad \rightarrow \quad 2C = C\left(1+\frac{0.10}{4}\right)^{4t}$$

$$2 = (1.025)^{4t}$$

Se aplican logaritmos de la siguiente manera para despejar t:

$$\log 2 = \log\,(1.025)^{4t} \quad \rightarrow \quad \log 2 = 4t\,(\log 1.025)$$

$$t = \frac{\log 2}{4\log 1.025}$$

$$t = 7 \text{ años}$$

Entonces, se concluye que el tiempo necesario para duplicar la inversión es de 7 años.

EJERCICIO 159

Determina el monto que se genera en cada uno de los siguientes problemas:

1. \$10 000 que se invierten a una tasa de 10% de interés compuesto anual, durante 10 años.
2. \$32 000 se invierten a 12% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente durante 6 años.
3. \$32 158 que vencen en 7.5 años, a 6% de interés compuesto anual.
4. \$24 000 que vencen en $6\frac{2}{3}$ años, a 9% de interés compuesto anual, capitalizable cuatrimestralmente.
5. \$9 500 que vencen en $8\frac{1}{2}$ años, a 4% de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente.
6. \$15 400 que vencen en 3 años, a $6\frac{3}{4}$ % de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente.
7. \$950 que vencen en $2\frac{1}{2}$ años, a $12\frac{1}{2}$ % de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente.
8. \$6 000 que vencen en $3\frac{2}{3}$ años, a $10\frac{1}{4}$ % de interés compuesto anual, capitalizable mensualmente.
9. \$6 000 que vencen en $3\frac{2}{3}$ años, a $10\frac{1}{4}$ % de interés compuesto anual capitalizable cuatrimestralmente.
10. \$154 000 que vencen en 3 años, a $6\frac{3}{4}$ % de interés compuesto anual, capitalizable semanalmente.

Resuelve los siguientes problemas:

11. Una compañía de seguros presenta a un padre de familia un fideicomiso para que su hijo de 8 años reciba una cantidad de \$40 000 cuando tenga 22 años. Determina la cantidad inicial que debe destinar si se le ofrece un contrato con una tasa de 6% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente.
12. Una deuda de \$9 000 dentro de 5 años, deberá liquidarse con un pago de \$14 747.55, ¿a qué tasa de interés trimestral está comprometido el préstamo?
13. ¿Qué tasa de interés compuesto anual duplica una inversión en 5 años?

14. ¿Qué tasa de interés compuesto anual, capitalizable trimestralmente, duplica el valor de la inversión en 10 años?
15. ¿Qué tiempo se necesita para triplicar una inversión con rendimiento de 10% de interés compuesto anual, capitalizable cuatrimestralmente?
16. El índice de crecimiento que se plantea para una población de 6 700 habitantes es de 2% anual. ¿Cuánto habrá crecido la población en 20 años?
17. ¿Qué tiempo habrá transcurrido para que un capital de $5 300 se convirtiera en $5 627.45, con una tasa de interés compuesto anual de 2%, capitalizable mensualmente?
18. Una empresa pide un préstamo bancario de $400 000 para la compra de maquinaria. Si dicho crédito está sujeto a 5% de interés compuesto anual, capitalizable semestralmente, y el tiempo para pagarlo es de 10 años, ¿cuál será el monto que se pagará?
19. Emilia invierte $85 000 durante 3 años y recibe un monto de $92 881. ¿Cuál fue la tasa de interés compuesto anual a la que fue sometida dicha inversión?
20. ¿Cuál fue el interés que generaron $20 000 si se invirtieron con una tasa de 12% de interés compuesto anual, capitalizable mensualmente durante 4 años?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Depreciación

Se define como la pérdida de valor de un activo físico (automóviles y casas, entre otros), como consecuencia del uso o del transcurso del tiempo. Muchos de ellos tienen una vida útil durante un periodo finito.

En este capítulo sólo se abordará el método de porcentaje fijo, que se define como:

$$S = C(1-d)^t$$

Donde:

S: valor de salvamento o valor de desecho

C: costo original del activo

d: tasa de depreciación anual

t: vida útil calculada en años

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La tasa de depreciación de un automóvil del año está calculada en 8% anual. Si un cliente paga en una agencia $120 000 por una unidad, ¿cuál será el valor de desecho del automóvil al final de su vida útil, si se calcula que es de 5 años?

Solución

De acuerdo con los datos:

$$C = 120\,000,\ d = 8\% = 0.08 \ \text{ y } \ t = 5$$

Al sustituir los valores en la fórmula y desarrollar las operaciones se obtiene:

$$S = 120\,000\ (1-0.08)^5 = 120\,000(0.92)^5 = 120\,000(0.6590) = 79\,080$$

Por tanto, el valor del automóvil a los cinco años es de $79 080

2 Una pizzería compra una motocicleta en $42 000 para el reparto de su mercancía. Se calcula que su vida útil será de 4 años y al final de ella su valor de desecho será de $15 000, determina la tasa de depreciación anual de la motocicleta.

Solución

De acuerdo con los datos:

$$C = 42\ 000,\ S = 15\ 000 \text{ y } t = 4$$

Al sustituir los valores en la fórmula y despejando d, se obtiene:

$$15\ 000 = 42\ 000(1-d)^4 \qquad 1-d = \sqrt[4]{\frac{15\ 000}{42\ 000}} \qquad 1-d = 0.7730$$

$$d = 0.227$$
$$d = 22.7\%$$

Por consiguiente, la tasa de depreciación es de 22.7%

3 Se adquirió una máquina de bordado, cuyo precio fue de \$78 600. Si su valor de desecho es de \$20 604.50 y la tasa de depreciación es de 20% anual, calcula la vida útil de la bordadora.

Solución

De acuerdo con los datos:

$$C = 78\ 600, \quad S = 20\ 604.50 \quad \text{y} \quad d = 20\% = 0\ .20$$

Al sustituir en la fórmula:

$$S = C(1-d)^t \qquad 20\ 604.5 = 78\ 600(1-0.20)^t$$

Se aplican logaritmos para despejar t:

$$t = \frac{\log(20\ 604.5) - \log(78\ 600)}{\log(0.80)} = 6$$

Por tanto, la vida útil de la máquina de bordado es de 6 años.

EJERCICIO 160

Realiza los siguientes problemas:

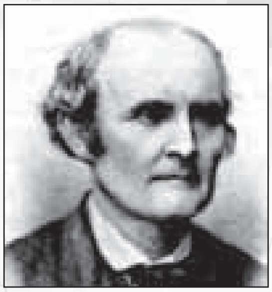
1. La tasa de depreciación de una máquina está calculada en 12% anual. Si su costo es de \$200 000, ¿cuál será su valor de desecho, si tiene una vida útil de 10 años?
2. El costo de una impresora es de \$8 000 y se calcula que su vida útil es de 3 años. Si la tasa de depreciación es de 23%, determina su valor de desecho.
3. Un agricultor compró un tractor con valor de \$300 000 y calcula que tiene una vida útil de 7 años, al cabo de los cuales su valor de desecho es de \$40 045. ¿Cuál es la tasa de depreciación del tractor?
4. Un edificio tiene un costo de \$1 200 000, se le ha estimado un valor de salvamento de \$226 432, y una probable vida útil de 20 años. Determina su tasa de depreciación anual.
5. Una escuela adquirió una camioneta en \$230 000 para el transporte de material, si la tasa de depreciación anual es de 12%, ¿cuál será su valor al cabo de 3 años?
6. Un automóvil tiene un costo de \$96 000, una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de \$31 457. Determina la tasa de depreciación anual.
7. Se adquirió una planta de luz cuyo costo fue de \$220 000, se le ha estimado un valor de salvamento de \$30 238; si la tasa de depreciación es de 18% anual, ¿cuál es su vida útil?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 3

Matrices

Reseña HISTÓRICA



Arthur Cayley, matemático británico. En 1838 ingresó en el Trinity College de Cambridge, donde estudió matemáticas y fue nombrado profesor de esta disciplina; permaneció en Cambridge durante el resto de sus días. Uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, publicó a lo largo de su vida más de novecientos artículos científicos. Es considerado como uno de los padres del álgebra lineal, introdujo el concepto de matriz y estudió sus diversas propiedades. Con posterioridad empleó estos resultados para estudiar la geometría analítica de dimensión *n*.

Arthur Cayley (1821-1895)

Definición

Una matriz es un arreglo rectangular de números de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los números a_{11}, a_{12}, a_{13},...,a_{ij} reciben el nombre de elementos de la matriz. Para simplificar la notación, la matriz se expresa: $A = (a_{ij})$. El primer subíndice de cada elemento indica el renglón, y el segundo la columna de la matriz donde se encuentra el elemento.

$$\begin{array}{c} a_{31} \rightarrow \text{Columna} \rightarrow \\ \downarrow \\ \text{Renglón} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & & C_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \\ R_m \end{array}$$

Donde: $R_1, R_2, \ldots, R_n$ son renglones y $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son columnas.

Ejemplos

Sea la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & -7 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determina: a_{21}, $a_{22,}$ a_{33} y a_{43}

Solución

a_{21}: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 1, es decir, $a_{21} = -3$
a_{22}: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 2, es decir, $a_{22} = 4$
a_{33}: es el valor que se encuentra en el renglón 3, columna 3, es decir, $a_{33} = -7$
a_{43}: es el valor que se encuentra en el renglón 4, columna 3, es decir, $a_{43} = 1$

Orden de una matriz

El tamaño de una matriz de m renglones y n columnas se conoce como orden y se denota por $m \times n$.

Ejemplos

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$ Orden $= 1 \times 3$

$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ Orden $= 3 \times 1$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ Orden $= 2 \times 2$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ Orden $= 2 \times 3$

Número de elementos de una matriz

En una matriz de m renglones y n columnas, el número de elementos es $m \times n$, m veces n elementos.

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$m \times n = 1 \times 3 = 3$ 3 elementos

$m \times n = 3 \times 1 = 3$ 3 elementos

$m \times n = 2 \times 2 = 4$ 4 elementos

$m \times n = 2 \times 3 = 6$ 6 elementos

Tipos de matrices

Matriz cuadrada. Es aquella cuyo número de renglones es igual al número de columnas; es decir, una matriz de n renglones con n columnas, recibe el nombre de matriz cuadrada de orden n.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden 2 Matriz cuadrada de orden 3 Matriz cuadrada de orden n

Ejemplos

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden 2 Matriz cuadrada de orden 3

Matriz renglón. Es aquella de orden $1 \times n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & \frac{1}{3} & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Orden $= 1 \times 4$ Orden $= 1 \times 5$

Matriz columna. Es aquella de orden $m \times 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Orden $= 2 \times 1$ Orden $= 4 \times 1$

Matriz cero (matriz nula). Es aquella en la cual todos los elementos son cero.

Ejemplos

$$\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Matriz nula de orden 1×3 — Matriz nula de orden 4×1 — Matriz nula de orden 3 — Matriz nula de orden 3×2

Matriz diagonal. Es aquella matriz de orden n que tiene elementos distintos de cero en la diagonal principal, es decir, una matriz cuadrada $M=\left(m_{ij}\right)$, donde $m_{ij}=0$ siempre que $i\neq j$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}m_{11}&0&0&0&\ldots&0\\0&m_{22}&0&0&\ldots&0\\0&0&m_{33}&0&\ldots&0\\0&0&0&m_{44}&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&\ldots&m_{nn}\end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-6&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-4&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-6&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Matriz identidad (matriz unidad). Es aquella matriz diagonal de orden n, cuyos elementos distintos de cero son 1, se denota por $\boldsymbol{I}_n$

$$\boldsymbol{I}_n=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&\ldots&0\\0&1&0&0&0&\ldots&0\\0&0&1&0&0&\ldots&0\\0&0&0&1&0&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&0&\ldots&1\end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$\boldsymbol{I}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{I}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Matriz identidad de orden 2 — Matriz identidad de orden 3

Matriz triangular superior. Es aquella matriz cuadrada de orden n, donde los elementos $a_{ij}=0$, para $i>j$, es decir, todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\ldots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\ldots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\ldots&a_{3n}\\\vdots&&&&\\0&0&0&\ldots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz superior de orden 2 — Matriz superior de orden 3

Matriz triangular inferior. Es aquella matriz cuadrada de orden n, donde $a_{ij} = 0$, para $i < j$, es decir, todos los elementos por arriba de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz inferior de orden 2 — Matriz inferior de orden 4

Matriz simétrica. Es aquella matriz cuadrada de orden n, tal que los elementos $a_{ij}=a_{ji}$

Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ de orden 2, es simétrica si:

$$\{a_{12} = a_{21}$$

La matriz $\boldsymbol{B}$ de orden 3, es simétrica si:

$$\begin{cases} b_{12} = b_{21} \\ b_{13} = b_{31} \\ b_{23} = b_{32} \end{cases}$$

La matriz $\boldsymbol{C}$ de orden 3, es simétrica porque:

$$\begin{cases} c_{12} = c_{21} = 6 \\ c_{13} = c_{31} = -3 \\ c_{23} = c_{32} = 4 \end{cases}$$

Matrices iguales. Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y sus elementos correspondientes son respectivamente iguales.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si las matrices $\begin{bmatrix} \sqrt{16} & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 4 & (-1)^2 & 5 \\ -1 & \sqrt{4} & -3 \\ 1 & 0 & \sqrt[3]{27} \end{bmatrix}$ son iguales.

Solución

Las matrices son iguales porque son del mismo orden y sus elementos son iguales:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{16} & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 4 & (-1)^2 & 5 \\ -1 & \sqrt{4} & -3 \\ 1 & 0 & \sqrt[3]{27} \end{bmatrix}$$

2 Determina el valor de x, y, w y z, para que:

$$\begin{bmatrix} x+y & 6z \\ 2w & 2x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Solución

Las matrices tienen la misma dimensión, al realizar la igualdad de términos se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 6z=2 \\ 2w=6 \\ 2x-3y=-7 \end{cases}$$

Al resolver el sistema resulta que $x = -2$, $y = 1$, $w = 3$ y $z = \frac{1}{3}$

EJERCICIO **161**

Determina los valores de las incógnitas, para que las matrices sean iguales.

1. $\begin{bmatrix} a & 3 \\ 4 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y+1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3 & z \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} t+4 & 6-r & 2q+1 \end{bmatrix} = [6-t \quad 5 \quad 7-q]$

4. $\begin{bmatrix} 7 & 3-x \\ y & -1 \\ 8 & 2 \\ 0 & z+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -4 \\ 2-y & -1 \\ 8 & 2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación por un escalar

Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ y λ un número real, entonces $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ es decir, si:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ entonces } \lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & ... & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & ... & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & ... & \lambda a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & ... & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta nueva matriz también recibe el nombre de *matriz escalar*.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ determina $3A$.

Solución

El escalar 3 se multiplica por cada uno de los elementos de la matriz.

$$3A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2) & 3(-1) \\ 3(4) & 3(6) \\ 3(0) & 3(-2) \\ 3(1) & 3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 18 \\ 0 & -6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 18 \\ 0 & -6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

2 Si $B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ encuentra $\frac{1}{2}B$.

Solución

El escalar $\frac{1}{2}$ multiplica a cada uno de los términos de la matriz.

$$\frac{1}{2}B = \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(6) & \frac{1}{2}(-3) & \frac{1}{2}(4) \\ \frac{1}{2}(5) & \frac{1}{2}(-2) & \frac{1}{2}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por tanto, $\frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Suma

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de orden $m \times n$, la suma de A y B está determinada por:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij})$$

Donde $A + B$ es la matriz de orden $m \times n$ que resulta de sumar los elementos correspondientes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina $A + B$ para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Determina $A + B$

Solución

Las matrices tienen el mismo orden, en este caso, 3×2, entonces la suma se puede realizar; la definición indica que cada término de la primera matriz se suma con los términos correspondientes de la segunda matriz, es decir, se suman $a_{11} + b_{11}$, $a_{12} + b_{12}$, $a_{21} + b_{21}$, …, $a_{31} + b_{31}$,

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & -7\\ 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+2 & 6+(-1)\\ 2+6 & 4+(-7)\\ -1+4 & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 5\\ 8 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

Por tanto, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5 & 5\\ 8 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

2 Sean las matrices:

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}5 & -2 & 6 & -3\\ -2 & 8 & -7 & 8\end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 8 & -5\\ 6 & 2 & 1 & -7\end{bmatrix}$$

Determina $3\boldsymbol{C}+2\boldsymbol{D}$

Solución

Se determina cada matriz escalar:

$$3\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3(5) & 3(-2) & 3(6) & 3(-3)\\ 3(-2) & 3(8) & 3(-7) & 3(8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & -6 & 18 & -9\\ -6 & 24 & -21 & 24\end{bmatrix}$$

$$2\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2(-1) & 2(-4) & 2(8) & 2(-5)\\ 2(6) & 2(2) & 2(1) & 2(-7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -8 & 16 & -10\\ 12 & 4 & 2 & -14\end{bmatrix}$$

Las matrices tienen el mismo orden, 2×4, al sumar se obtiene:

$$3\boldsymbol{C}+2\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}15 & -6 & 18 & -9\\ -6 & 24 & -21 & 24\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -8 & 16 & -10\\ 12 & 4 & 2 & -14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & -14 & 34 & -19\\ 6 & 28 & -19 & 10\end{bmatrix}$$

Finalmente, $3\boldsymbol{C}+2\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}13 & -14 & 34 & -19\\ 6 & 28 & -19 & 10\end{bmatrix}$

Inverso aditivo

El inverso aditivo de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden $m \times n$ es $-\boldsymbol{A}$.

Si $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, entonces $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$, es decir, el inverso aditivo de una matriz se obtiene al multiplicar cada elemento por el escalar -1, en otras palabras, el inverso aditivo de una matriz $\boldsymbol{A}$ es otra matriz $-\boldsymbol{A}$, tal que $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$, donde $\boldsymbol{0}$ es la matriz cero o nula.

Ejemplo

Si $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ -10 & 1 & 3\end{bmatrix}$, determina $-\boldsymbol{A}$, $-\boldsymbol{B}$ y verifica que $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$.

Solución

Se obtiene la matriz inverso aditivo de la matriz $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}\rightarrow -\boldsymbol{A}=(-1)\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}\rightarrow -\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1(-3) & -1(-5)\\ -1(7) & -1(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -7 & 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ -10 & 1 & 3\end{bmatrix}\rightarrow -\boldsymbol{B}=(-1)\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & 5 & 7\\ -10 & 1 & 3\end{bmatrix}\rightarrow -\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 4 & -5 & -7\\ 10 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

Se realiza la operación $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})$

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 5\\ -7 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+3 & -5+5\\ 7-7 & -2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Por tanto, $-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -7 & 2\end{bmatrix}$, $-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 4 & -5 & -7\\ 10 & -1 & -3\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$

Resta

La diferencia o resta de dos matrices $m\times n$, se define:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

Donde $-\boldsymbol{B}$ es el inverso aditivo de $\boldsymbol{B}$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ si

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}\text{ y }\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

Solución

Para determinar la resta, la segunda matriz se multiplica por el escalar -1, entonces la nueva matriz se suma con la primera y queda como resultado:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}2 & -5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 5\\ -4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$

2 Sean las matrices $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 4 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, determinar $3\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{N}$.

Solución

La operación $3\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{N}$ se puede expresar como en $3\boldsymbol{M}+(-2\boldsymbol{N})$, se obtienen las matrices escalares y finalmente se suman.

$$3\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}-9 & 3\\ 12 & 15\\ 0 & 3\end{bmatrix}\quad\text{y}\quad -2\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}-4 & 8\\ 2 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Entonces,

$$3\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{N}=3\boldsymbol{M}+(-2\boldsymbol{N})=\begin{bmatrix}-9 & 3\\ 12 & 15\\ 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 8\\ 2 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9-4 & 3+8\\ 12+2 & 15+0\\ 0+0 & 3-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13 & 11\\ 14 & 15\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

Finalmente, $3\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{N}$ *es* $\begin{bmatrix}-13 & 11\\ 14 & 15\\ 0 & -3\end{bmatrix}$

3 Dada la siguiente igualdad:

$$3\begin{bmatrix}m+2 & n\\ 1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m-2 & -n\\ y & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 8\\ 3 & 7\end{bmatrix}$$, determina el valor de las incógnitas.

Solución

Se realizan las operaciones indicadas.

$$3\begin{bmatrix}m+2 & n\\ 1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m-2 & -n\\ y & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(m+2)-(m-2) & 3n-(-n)\\ 3(1)-y & 3(4)-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2m+8 & 4n\\ 3-y & 7\end{bmatrix}$$

Luego, $\begin{bmatrix}2m+8 & 4n\\ 3-y & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 8\\ 3 & 7\end{bmatrix}$

Los términos resultantes se igualan con los términos correspondientes de la matriz del segundo miembro, y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}2m+8=10\\ 4n=8\\ 3-y=3\end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtienen los siguientes valores: $y=0$, $m=1$ y $n=2$

EJERCICIO **162**

Para las siguientes matrices, efectúa $A+B$, $A-B$, $A-A$, $4A-3B$ y $2A-0B$

1. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-6 & 7 & 3\end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -7\\ 1 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 2 & -6\\ 1 & 7\end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ 4 & -6 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -6 & 4\\ -3 & 2 & 7\end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & 5 & \frac{1}{8}\\ 0 & 3 & 2\\ 7 & \frac{1}{5} & 0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & -5 & 8\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

En las siguientes igualdades, determina el valor de las incógnitas.

6. $\begin{bmatrix}a-7 & 5 & w\\ v-4 & 1-c & d\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}3 & b-1 & -4\\ -v & -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 7 & -w\\ -1 & -7 & 5\end{bmatrix}$

7. $2\begin{bmatrix} x+1 & 1 \\ 5 & 0 \\ 3 & 1-w \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & n \\ y-1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8-n \\ -5 & 6 \\ 0 & -w \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -w & 3 \\ 11 & 9 & 12 \\ y & -7 & 2v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & -4 & 2 \\ -1 & z-1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 10 & 10 & 13 \\ 6 & -4 & v \end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Multiplicación

Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$, y $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ una matriz de orden $n \times p$, la multiplicación $\boldsymbol{AB}$ da como resultado la matriz $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ de orden $m \times p$, tal que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Para:

$i = 1, 2, 3, 4, \ldots, m;$ $\qquad\qquad$ $j = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$

El número de columnas de la matriz $\boldsymbol{A}$, es igual al número de renglones de la matriz $\boldsymbol{B}$.

Matriz $\boldsymbol{A}$ $\qquad\qquad$ Matriz $\boldsymbol{B}$

$m \times n$ $\qquad\qquad$ $n \times p$

igual

Tamaño de $\boldsymbol{AB}$ es $m \times p$

Ejemplos

Matriz *A*	Matriz *B*	Matriz *AB*
2×3	3×4	2×4
1×2	2×3	1×3
5×4	4×2	5×2
3×1	3×1	No definida

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la multiplicación de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

$\boldsymbol{A}$ es una matriz de 2×2 y $\boldsymbol{B}$ de 2×3, por tanto, la multiplicación se puede realizar. Al aplicar la definición se procede de la siguiente manera: se multiplica el primer renglón por cada una de las columnas de la segunda matriz.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2)+3(-1) & 2(0)+3(1) & 2(3)+3(5) \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 21 \\ & & \end{bmatrix}$$

Se realiza la misma operación con el segundo renglón.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 5(2)+4(-1) & 5(0)+4(1) & 5(3)+4(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ 6 & 4 & 35 \end{bmatrix}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Finalmente, se unen los resultados para obtener la matriz $\boldsymbol{AB}$,

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 21 \\ 6 & 4 & 35 \end{bmatrix}$$

Su orden es de 2×3

2 Determina $\boldsymbol{R}^2$ si $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución

Se transforma $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{RR}$; esto es posible si $\boldsymbol{R}$ es una matriz cuadrada y se procede a realizar las operaciones indicadas en el ejemplo anterior.

$$\boldsymbol{R}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(3)+1(0)-1(-2) & 3(1)+1(4)-1(1) & 3(-1)+1(2)-1(0) \\ 0(3)+4(0)+2(-2) & 0(1)+4(4)+2(1) & 0(-1)+4(2)+2(0) \\ -2(3)+1(0)+0(-2) & -2(1)+1(4)+0(1) & -2(-1)+1(2)+0(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 6 & -1 \\ -4 & 18 & 8 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ entonces } \boldsymbol{R}^2 = \begin{bmatrix} 11 & 6 & -1 \\ -4 & 18 & 8 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Propiedades de las matrices

Sean las matrices $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ de orden $m \times n$, $\boldsymbol{O}$ la matriz nula de $m \times n$, $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad y r, s escalares, entonces:

Propiedades	
Conmutativa de la suma	$P + Q = Q + P$
Asociativa de la suma	$P + (Q + R) = (P + Q) + R$
Identidad de la suma	$P + O = O + P = P$
Distributiva izquierda	$r(P + Q) = rP + rQ$
Distributiva derecha	$(r + s)P = rP + sP$
Inverso aditivo	$P + (-P) = O$
Asociativa de la multiplicación de escalares	$(r \cdot s)P = r(sP)$
Asociativa de la multiplicación	$P(QR) = (PQ)R$
Identidad de la multiplicación	$IP = PI = P$
Distributiva por la izquierda	$P(Q + R) = PQ + PR$
Distributiva por la derecha	$(Q + R)P = QP + RP$

EJERCICIO 163

Para las siguientes matrices determina *AB*, *BA*, *A*(*B* – 2*C*) y *A*(*BC*), en caso de ser posible.

1. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

6. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Determinantes

El determinante de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden n, es un número escalar que se relaciona con la matriz, mediante una regla de operación. Denotada por det$\boldsymbol{A} = |A|$

Sea la matriz de orden 2

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

El determinante de $\boldsymbol{A}$ está dado por:

$$(-)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$(+)$$

Por tanto,

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplo

Evalúa el determinante de la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

Cada elemento de la matriz se sustituye en la fórmula y se realizan las operaciones.

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (4)(5) - (-2)(1) \;\; 20 + 2 = 22$$

Finalmente, el det$\boldsymbol{A} = 22$

Sea la matriz de orden 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se escribe el determinante de 3×3, para resolverlo se repiten los dos primeros renglones y se multiplican las entradas en diagonal como se indica:

$$det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{array}{c} (-) \\ (-) \\ (-) \\ \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{array}$$

Por tanto, el determinante es:

$$\det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}) - (a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13})$$
$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$$

Ejemplo

El determinante de la matriz B, es:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución

Se forma el siguiente arreglo: se aumentan los dos primeros renglones del determinante, como se indica, después se procede a sustituir los términos en la fórmula y se realizan las operaciones indicadas en la fórmula.

$$det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{c} (-) \\ (-) \\ (-) \\ \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{array}$$

Por consiguiente, el determinante es:

$$\det B = (2)(3)(6) + (-2)(1)(0) + (-5)(-1)(4) - (-2)(-1)(6) - (2)(1)(4) - (-5)(3)(0)$$
$$= 36 + 0 + 20 - 12 - 8 - 0 = 36$$

En consecuencia, el $\det B = 36$

Propiedades

1. Si se intercambian dos renglones de una matriz A de orden n, el determinante de la matriz resultante es:

$$\det A = -\det A$$

2. Si son cero todos los elementos de un renglón o columna de una matriz A de orden n, entonces

$$\det A = 0$$

3. Si 2 renglones son iguales de una matriz A de orden n, entonces

$$\det A = 0$$

4. Si se tiene una matriz A de orden n, ya sea matriz triangular superior o inferior, entonces

$$\det A = \text{producto de los elementos de la diagonal principal}$$

5. Si un renglón de una matriz se multiplica por un escalar λ, entonces

$$\det \boldsymbol{A} = \lambda \det \boldsymbol{A}$$

6. Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices de orden n, entonces

$$\det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica la propiedad 2 si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución

Se observa que en uno de los renglones de la matriz todos son ceros, luego se procede a encontrar el determinante de la matriz A

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix} = (1)(0)-(0)(-3) = 0 - 0 = 0$$

Finalmente, el $\det \boldsymbol{A} = 0$, y se verifica la propiedad 2

2 Verifica la propiedad 4 si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Solución

Se observa que la matriz es triangular superior, entonces el producto de la diagonal principal es:

$$(5)(4)=20$$

Luego, se procede a hallar el determinante de la matriz A

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix} = (5)(4)-(0)(1) = 20 - 0 = 20$$

Por tanto, $\det \boldsymbol{A} = (5)(4) = 20$

Finalmente, se verifica la propiedad 4

3 Verifica que el $\det \boldsymbol{A} = 0$ si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Solución

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= (1)(3)(2)+(2)(3)(2)+(1)(3)(4)-(2)(3)(2)-(1)(3)(4)-(1)(3)(2) \\ &= 6 + 12 + 12 - 12 - 12 - 6 = 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\det \boldsymbol{A} = 0$$

EJERCICIO 164

Encuentra el determinante de las siguientes matrices:

1. $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\4 & 5\end{bmatrix}$ 2. $B=\begin{bmatrix}-2 & 6\\1 & -7\end{bmatrix}$ 3. $C=\begin{bmatrix}0 & 5\\10 & -4\end{bmatrix}$ 4. $E=\begin{bmatrix}3 & -1 & 8\\5 & 6 & 4\\0 & 4 & -3\end{bmatrix}$ 5. $D=\begin{bmatrix}-2 & -5 & -1\\-4 & -1 & -3\\1 & 0 & -6\end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Matriz inversa

Dada una matriz cuadrada $\boldsymbol{P}$ de orden n, si existe una matriz $\boldsymbol{Q}$ tal que:

$$\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{QP}=\boldsymbol{I}_n$$

Entonces, se dice que la matriz $\boldsymbol{Q}$ es la matriz inversa de $\boldsymbol{P}$ y se denota $\boldsymbol{P}^{-1}$, de tal forma que:

$$\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_n$$

Donde:

$\boldsymbol{I}_n$: Matriz identidad de orden n

Para que exista la inversa de la matriz P es necesario que la matriz sea cuadrada y el $\det P \neq 0$

Método de Gauss-Jordan

Se utiliza la matriz aumentada, la cual se obtiene al unir la matriz cuadrada de orden n con la matriz identidad $\boldsymbol{I}_n$; una vez aumentada la matriz, por medio de operaciones elementales, se obtiene otra matriz.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0\\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1n}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & q_{21} & q_{22} & \ldots & q_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & q_{n1} & q_{n2} & \ldots & q_{nn}\end{array}\right]$$

Si en el proceso algún elemento de la diagonal principal es cero, entonces la matriz no tiene inversa.

EJEMPLOS

1 Obtén R^{-1}, si $R=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}$.

Solución

Se aumenta la matriz y se efectúan las operaciones indicadas:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}2 & 1 & 1 & 0\\1 & -3 & 0 & 1\end{array}\right]_{R_2\leftrightarrow R_1} \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 0 & 1\\2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]_{2R_1-R_2\to R_2} \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 0 & 1\\0 & -7 & -1 & 2\end{array}\right]_{7R_1-3R_2\to R_1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc}7 & 0 & 3 & 1\\0 & -7 & -1 & 2\end{array}\right]_{\frac{R_1}{7}\to R_1} \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\0 & -7 & -1 & 2\end{array}\right]_{-\frac{R_2}{7}\to R_2} \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7}\end{array}\right]$$

Por tanto, $R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

2 Determina B^{-1} si $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{2R_1-R_2\to R_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{4R_1-R_3\to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right]_{10R_2-3R_3\to R_3} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{R_2+2R_3\to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 18 & -21 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{\frac{1}{3}R_2\to R_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{R_1+R_3\to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 9 & -10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]_{R_1-2R_2\to R_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -10 & 3 \end{array}\right]$$

Finalmente, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 6 & -7 & 2 \\ 8 & -10 & 3 \end{bmatrix}$

EJERCICIO **165**

Determina la matriz inversa de las siguientes matrices:

1. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

6. $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

7. $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

8. $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

9. $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Inversa de una matriz para resolver sistemas de ecuaciones

Sea el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Si el sistema se expresa en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{C}$$

Si existe $\boldsymbol{A}^{-1}$, se multiplican por $\boldsymbol{A}^{-1}$ *a* ambos miembros de la igualdad.

Se obtiene: $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$, pero $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$ entonces, $\boldsymbol{IX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$. $\rightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$.

Esta última expresión resuelve el sistema de ecuaciones.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$.

Solución

Se definen las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{C}$, entonces: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

Luego, se obtiene la matriz inversa $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]_{R_2 \leftrightarrow R_1} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]_{2R_1 - R_2 \rightarrow R_2} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & -1 & 2 \end{array}\right]_{R_1 - \frac{4}{11}R_2 \rightarrow R_1}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 11 & -1 & 2 \end{array}\right]_{\frac{1}{11}R_2 \rightarrow R_2} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right]$$

Por consiguiente, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$

Finalmente, para hallar los valores de las incógnitas se aplica la expresión: $X = A^{-1}C$
Entonces:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11}(7)+\frac{3}{11}(-2) \\ -\frac{1}{11}(7)+\frac{2}{11}(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son:

$$x = 2,\ y = -1$$

2 Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} x+y-2z=-4 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x-2y+z=7 \end{cases}$.

Solución

Se definen las matrices A, X y C, entonces: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

Se obtiene la matriz A^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\substack{-2R_1+R_2\rightarrow R_2 \\ -3R_1+R_3\rightarrow R_3}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]_{-\frac{1}{3}R_2\rightarrow R_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\substack{-R_2+R_1\rightarrow R_1 \\ 5R_2+R_3\rightarrow R_3}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right]_{\frac{1}{2}R_3\rightarrow R_3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right]_{\substack{R_3+R_1\rightarrow R_1 \\ R_3+R_2\rightarrow R_2}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(*continúa*)

(*continuación*)

Finalmente, para hallar los valores de las incógnitas se aplica la expresión:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-4)+\left(-\frac{1}{2}\right)(1)+\frac{1}{2}(7) \\ \frac{5}{6}(-4)+\left(-\frac{7}{6}\right)(1)+\frac{1}{2}(7) \\ \frac{1}{6}(-4)+\left(-\frac{5}{6}\right)(1)+\frac{1}{2}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son: $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$

EJERCICIO 166

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de la inversa de una matriz.

1. $\begin{cases} 4x - y = 22 \\ 3x + 5y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7m + 9n = -10 \\ 2n - 3m = 16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6a + 7b = -4 \\ a - 2b = 31 \end{cases}$

4. $\begin{cases} a - 2b + c = 12 \\ 2a + b - c = 3 \\ a - b + 3c = 13 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ x + 4y + z = 12 \\ 3x - 5y - 2z = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = -2 \\ x - y + 4z = -6 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 1

EJERCICIO 140

1. $8 = 2^3$
2. $16 = x^4$
3. $81 = 3^4$
4. $\frac{1}{36} = 6^{-2}$
5. $9 = \left(\sqrt{3}\right)^4$
6. $343 = 7^x$
7. $\sqrt{6} = (a)^{\frac{1}{2}}$
8. $x - 1 = 3^2$
9. $625 = w^4$
10. $128 = (x-1)^7$
11. $243 = (3x)^5$
12. $256 = (2x-1)^8$
13. $\log_{17} a = 2$
14. $\log_5 625 = 4$
15. $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$
16. $\log_N \frac{1}{16} = 2$
17. $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{9}\right) = 2$
18. $\log_2(x+3) = 4$
19. $\log_2 256 = x$
20. $\log_{(x-2)} 8 = 3$
21. $\log_x z = w$
22. $\log_3 \frac{1}{81} = -4$
23. $\log_5 125 = -3x$
24. $\log_{(3x+2)} 441 = 2$

EJERCICIO 141

1. $x = 5$
2. $x = 4$
3. $y = 3$
4. $b = \frac{1}{5}$
5. $x = 4$
6. $a = 343$
7. $x = 81$
8. $m = 8$
9. $y = \frac{1}{32}$
10. $N = 8$
11. $w = 3$
12. $x = \frac{4}{9}$
13. $b = 2$
14. $x = 2$
15. $x = 3$
16. $a = -\frac{2}{5}$
17. $x = -6$
18. $y = -\frac{1}{4}$
19. $x = -3$

EJERCICIO 142

1. $4\log_a 7$
2. $-\frac{3}{2}\log_6 3$
3. $\frac{7}{3} + \frac{1}{3}\log_e x$
4. $\log 5 + \log x + 2\log y$
5. $3\log_3 x + 2\log_3 y + \log_3 z$
6. $8 + 2\ln 3 + 4\ln x$
7. $3\log(x+y) + \log(x-z)$
8. $\log_{\frac{1}{2}} 7 - 2\log_{\frac{1}{2}} x$
9. $\ln x + 2\ln y - 3 - 4\ln z$
10. $\log_5 3 + 3\log_5 x + 6\log_5(1-2x) - \log_5 2 - y\log_5 x - \log_5(x^2 - y^2)$
11. $\frac{1}{2}\log_4 3 + \log_4 x + 2\log_4 y$
12. $2\log(x+y) + \frac{5}{2}\log z$
13. $\frac{1}{3}\log x - \frac{1}{2}\log y$
14. $\frac{3}{2}\log a + \frac{1}{2}\log b - \frac{2}{3}\log c - \frac{1}{3}\log d$
15. $\frac{1}{2}\log_2(x+y) - 4\log_2(x-y)$
16. $2\log x - \frac{1}{3}\log(x-3) - 2\log(x+z)$
17. $\frac{1}{2}\log(x+3) + \frac{1}{2}\log(y-5) - 2\log(x+6) - \frac{1}{4}\log(y-2)$
18. $\frac{2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{2}{5}\ln(x+1) + \frac{7}{30}\ln(x-1)$
19. $\ln 25x^2$
20. $\log \frac{m^3}{n^2}$
21. $\log_7 \sqrt[6]{x^3y^2}$
22. $\ln 8e^{4x}$
23. $\log n^4 \sqrt[5]{m^2}$
24. $\log_2 3 \cdot 4^x$
25. $\log_b \frac{1}{\sqrt[12]{(x+1)^8(x+2)^3}}$
26. $\log \frac{3y}{x}$
27. $\log_2 \frac{x}{yz}$
28. $\log_4 \frac{4}{m^2-1}$
29. $\log \frac{x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{4}}}$
30. $\ln \frac{5ey}{x^7}$
31. $\ln \frac{e^{2-x}(x+y)^3}{(x-y)^3}$
32. $\log \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^2}{(x+2)^{\frac{4}{5}}}$
33. $\log_2 \sqrt{\frac{2x^{14}}{y^3}}$
34. $\log \frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{2}}}{10x^{\frac{1}{6}}}$
35. $\log \frac{10^{x^2+x+1}(x+1)^3}{x^2}$
36. $\ln\left(\frac{9m^2p}{7xy^3}\right)^2$

EJERCICIO 143

1. $x = 1$
2. $x = -20$
3. $x = 9,\ x = -\frac{27}{5}$
4. $x = 17$
5. $x = 6,\ x = -6$
6. $x = 13$
7. $x = 40$
8. $x = 25$
9. $x = 17,\ x = 7$
10. $x = \frac{9}{2}$
11. $x = 8,\ x = \frac{22}{9}$
12. $x = -1$
13. $x = 0,\ x = -35$
14. $x = 6$
15. $x = 3$
16. $x = 12,\ x = \frac{7}{11}$

17. $x = 5$
18. $x = 6$
19. $x = 7$
20. $x = 4$
21. $x = \frac{e+1}{e-1}$
22. $x = 4e$
23. $x = 4$
24. $x = \frac{2\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}-1}$
25. $x = \frac{e^e+3}{2-e^e}$
26. $x = \frac{1}{e}$

EJERCICIO 144

1. $x = 4$
2. $x = \frac{3\log 2}{\log 3}$
3. $x = 0$
4. $x = \frac{1}{2}$
5. $x = 1.20557$
6. $x = 2$
7. $x = 3$
8. $x = 2$
9. $x = -1$
10. $x = 3$
11. $x = \frac{2\log 2 + 3\log 5}{2\log 5}$
12. $x = -1.72683$
13. $x = -\frac{7}{3}$
14. $x = \frac{7}{3}$
15. $x = -4$
16. $x = \frac{2}{5}$
17. $x = \frac{5}{3}$
18. $x = \frac{5}{2}$
19. $x = -\frac{1}{2}$
20. $x = \sqrt{6}$, $x = -\sqrt{6}$
21. $x = 3$, $x = -1$
22. $x = 2$
23. $x = -\frac{3}{2}$
24. $x = -1$, $x = -2$
25. $x = -1$
26. $x = 2$
27. $x = \frac{\log 2}{2\log 2 - \log 3}$
28. $x = 0$, $x = 2$
29. $x = \frac{2\log 7 + \log 5}{2\log 7 - \log 5}$
30. $x = 0$
31. $y = \ln 11 - \ln 13$
32. $x = 2$, $x = 1$
33. $x = \ln\sqrt[3]{2}$
34. $x = 0$
35. $x = \ln\left(1-\sqrt{e}\right)$
36. $x = \ln\sqrt{5}$

EJERCICIO 145

1. pH = 4.7212
2. pH = 3.2218
3. 1×10^{-9}
4. 4.3010
5. 0.9 segundos
6. 3 500 micrómetros
7. 59.46%
8. 6.4321 años
9. 1 38.62 años
10. 18 321 habitantes
11. 3.5 horas
12. 29.15 años
13. $T = 64.762°C$
14. $T = 94.84°C$
15. $t = 133.9$ min

CAPÍTULO 2

EJERCICIO 146

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$
2. 9.9, 9.99, 9.999, 9.9999, 9.99999
3. $2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \frac{26}{25}$
4. $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{8}{7}, 2$
5. $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{24}, \frac{3}{40}$
6. $-1, 4, -9, 16, -25$
7. 0, 0, 2, 6, 12
8. $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}$
9. 1, 2, 3, 4, 5
10. $1, -\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{8}{5}, \frac{5}{3}$
11. 2, 5, 11, 23, 47
12. $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$
13. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{10}{3}$
14. $27, -9, 3, -1, \frac{1}{3}$
15. $-1, -1, -2, -6, -24$
16. $-2, 4, 16, 256, 65\,536$
17. $4, 2, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}$
18. $3, 1, -1, 1, -1$

EJERCICIO 147

1. 48
2. 165
3. $\frac{617}{140}$
4. 126
5. $\sqrt{7}-1$
6. 18
7. $-\frac{11}{2}$
8. 21
9. n^2
10. $\frac{n\left(n+1\right)}{2}$
11. $c = 3$
12. $c = 1$
13. $c = 3$
14. $c = 2, -\frac{20}{13}$

EJERCICIO 148

1. Sí es
2. No es
3. Sí es
4. No es
5. Sí es
6. Sí es
7. $a_8 = 23$
8. $a_{11} = \frac{7}{2}$
9. $a_{15} = \frac{103}{12}$
10. $a_{10} = 55$
11. $a_{16} = \frac{27}{4}$
12. $a_7 = 48$
13. $a_{12} = -5$
14. $a_{18} = 454$
15. $a_{13} = -27$
16. $a_{17} = \frac{11}{4}$
17. $a_1 = 7$
18. $r = -2$
19. $n = 9$
20. $r = -\frac{1}{4}$
21. $a_{11} = -28$
22. $a_1 = -15$
23. $n = 10$
24. $a_1 = 7$

25. $a_1 = -\frac{17}{6}$
26. $n = 10$
27. $r = \frac{1}{4}$
28. $a_5 = -\frac{15}{4}$
29. $a_7 = 8n - 5$
30. $a_4 = \frac{20n-7}{6}$

EJERCICIO 149

1. $S_8 = 176$
2. $S_9 = 9$
3. $S_8 = 31$
4. $S_9 = 648$
5. $S_{13} = -78$
6. $S_{12} = 450$
7. $S_{11} = 0$
8. $S = 40\,600$
9. $S = \frac{n(n+1)}{2}$
10. $S = n(n+1)$
11. $S = n^2$
12. $n = 12$
13. $n = 10$
14. $a_1 = -9$
15. $a_1 = 2,\ a_n = 100$

EJERCICIO 150

1. 365 lugares
2. 518 ladrillos
3. $1 375
4. 9 rollos
5. 18 filas

EJERCICIO 151

1. $27\frac{1}{2}, 34, 40\frac{1}{2}, 47, 53\frac{1}{2}$
2. $6\frac{1}{2}, 8, 9\frac{1}{2}, 11, 12\frac{1}{2}, 14, 15\frac{1}{2}$
3. $1, 1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, 2, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}$
4. $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}$
5. $-2.5, -2, -1.5, -1, -0.5, 0$
6. $\frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{11}{6}$
7. Promedio = 8.24

EJERCICIO 152

1. 8 años
2. 9.8 de calificación
3. Promedio = 9
4. Promedio = $\frac{a_1 + a_n}{2}$
5. 7 hileras *y* constan de 80, 76, 72, 68, 64, 60, 56 tejas
6. 8 hileras de 58, 62, 66, 70, 74, 78, 82 *y* 86 tejas

EJERCICIO 153

1. Sí es
2. Sí es
3. No es
4. No es
5. No es
6. Sí es
7. $a_6 = -81$
8. $a_9 = \frac{128}{2187}$
9. $a_5 = -80$
10. $a_7 = \frac{5}{128}$
11. $a_{10} = -\frac{1}{2187}$
12. $a_8 = \frac{1}{16}$
13. $a_{12} = \frac{32}{243}$
14. $a_9 = m^{24}$
15. $a_{10} = n^{14}$
16. $a_7 = \frac{n^3}{n+1}$
17. $a_{13} = 2^{27x-16}$
18. $a_9 = a_1 r^{16}$
19. $a_1 = 2$
20. $a_2 = 4$
21. $r = \frac{1}{3}$
22. $r = \frac{3}{4}$
23. $n = 5$
24. $n = 8$
25. $n = 9$
26. $a_1 = \frac{1}{4}$
27. $a_4 = \frac{1}{m^4}$
28. $a_{11} = 2^{\frac{23}{6}x-9}$

EJERCICIO 154

1. $9, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -1$

   $9, 3, 1, -1$
2. 4 096 células
3. 3, 5, 7
4. 6 células
5. 30 388 bacterias
6. $a_t = 25\,000(1.05)^{3t}$
7. $339 814.7
8. 67 392 bebés
9. 4 cm^2

EJERCICIO 155

1. $S_6 = -\frac{364}{27}$
2. $S_7 = \frac{2\,059}{486}$
3. $S_9 = -855$
4. $S_{10} = \frac{989\,527}{2187}$
5. $S_{15} = \frac{32\,767}{8}$
6. $S_{18} = 524\,286$
7. $S_{12} = 1\,092 + 364\sqrt{3}$
8. $S_{10} = 31 - 31\sqrt{2}$
9. $S_{12} = \frac{n^{21}-n}{n-1}$
10. $S_9 = 511 \cdot 2^{x-2}$
11. $S_n = \frac{a_1\left(r^{2n}-1\right)}{r^2-1}$
12. $S_n = \frac{2^n-1}{2^n}$
13. $n = 8$
14. $r = \frac{1}{2}$
15. $a_1 = 27$
16. $a_n = \frac{1}{64}$
17. $a_1 = -2$
18. $r = \frac{3}{2}$
19. $n = 7$

EJERCICIO 156

1. 5 461 triángulos
2. 127 personas
3. 65 761.7 ton.
4. 34 316.76 partos
5. 1.01 % por año, 110.4 millones

EJERCICIO 157

1. $S = -4$
2. $S = \frac{9}{4}$
3. $S = 9$
4. $S = \frac{27}{4}$
5. $S = \frac{23}{8}$
6. $r = \frac{3}{5}$
7. $r = \frac{1}{3}$
8. $S = \frac{4}{3}$ cm^2
9. $S = 2\,048$ cm^2

EJERCICIO 158

1. 1, 2, 4, 8, 16
2. 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$
3. – 6, –12, – 24, – 48
4. 6, 24, 96, 384, 1 536
5. 6, $6\sqrt{3}$, 18
6. $\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{32}{27}, \frac{128}{81}$
7. – 64, – 32, – 16, – 8, – 4, – 2
8. $\frac{(x-1)^3}{3}, \frac{(x-1)^4}{9}, \frac{(x-1)^5}{27}$
9. a, 2, $\frac{4}{a}$
10. 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$
11. $3\sqrt{6}$
12. $-4\sqrt{2}$
13. $5\sqrt{5}$
14. 12
15. $\sqrt[3]{36}$
16. $8\sqrt[3]{2}$
17. $3\sqrt{3}$
18. $\frac{\sqrt{2}}{8}$

EJERCICIO 159

1. $25 937.4
2. $64 390.28
3. $49 783.2
4. $43 346.6
5. $13 324.4
6. $18 824.8
7. $1 292.2
8. $8 723.2
9. $8 682.5
10. $188 542
11. $17 483
12. $\begin{cases} \text{2.5\% trimestral} \\ \text{10\% anual} \end{cases}$
13. 14.86%
14. 7%
15. 11.1 años
16. 9 955 habitantes
17. 3 años
18. $655 446.5
19. 3%
20. $12 244.5

EJERCICIO 160

1. $55 700.19
2. $3 652.26
3. 25%
4. 8%
5. $156 738.56
6. 20%
7. 10 años de vida útil

CAPÍTULO 3

EJERCICIO 161

1. $a = 2$, $b = -1$
2. $x = -2$, $y = 4$, $z = 0$
3. $q = 2$, $r = 1$, $t = 1$,
4. $x = 7$, $y = 1$, $z = -2$

EJERCICIO 162

1. $A+B=\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $A-B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $4A-3B=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $2A-0B=\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A+B=\begin{bmatrix} -4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$, $A-B=\begin{bmatrix} 8 & -7 & -2 \end{bmatrix}$, $A-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $4A-3B=\begin{bmatrix} 26 & -21 & -5 \end{bmatrix}$, $2A-0B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. $A+B=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $A-B=\begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -1 & 6 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$, $A-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $4A-3B=\begin{bmatrix} 20 & -43 \\ -2 & 18 \\ 5 & -33 \end{bmatrix}$, $2A-0B=\begin{bmatrix} 4 & -14 \\ 2 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

4. $A+B=\begin{bmatrix} 3 & -9 & 3 \\ 1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$, $A-B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 7 & -8 & -6 \end{bmatrix}$, $A-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $4A-3B=\begin{bmatrix} 5 & 6 & -16 \\ 25 & -30 & -17 \end{bmatrix}$, $2A-0B=\begin{bmatrix} 4 & -6 & -2 \\ 8 & -12 & 2 \end{bmatrix}$

5. $A+B=\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{16}{3} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & -2 & 10 \\ \frac{23}{3} & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$, $A-B=\begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{14}{3} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{3} & 8 & -6 \\ \frac{19}{3} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

   $A-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $4A-3B=\begin{bmatrix} \frac{23}{5} & 19 & \frac{1}{2} \\ -1 & 27 & -16 \\ 26 & -\frac{8}{5} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$

   $2A-0B=\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 10 & \frac{1}{4} \\ 0 & 6 & 4 \\ 14 & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$

6. $\{\ a=7, b=2, c=2, d=5, v=-3, w=4$
7. $\{\ n=-3, w=-10, x=3, y=6$
8. $\{\ v=4, w=-2, x=3, y=7, z=2$

EJERCICIO 163

1. $AB=\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$
2. $AB=\begin{bmatrix} 5 & -5 \end{bmatrix}$
3. $BA=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$
4. $AB=\begin{bmatrix} -7 & -7 & -4 \\ -5 & -5 & -8 \end{bmatrix}$
5. $AB=\begin{bmatrix} -8 & -8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$
6. $AB=\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$
7. $AB=\begin{bmatrix} -1 & 25 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $A(BC)=\begin{bmatrix} 74 & 98 \\ 20 & 26 \end{bmatrix}$
8. $AB=\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $A(B-2C)=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, $A(BC)=\begin{bmatrix} 17 & -3 \\ 8 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

EJERCICIO 164

1. $\det A = 22$
2. $\det B = 8$
3. $\det C = -50$
4. $\det D = 43$
5. $\det E = 122$

EJERCICIO 165

1. $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{14}\end{bmatrix}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 2 & -3\end{bmatrix}$

2. $B^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$

3. $C^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

4. $D^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{6}{7} & \frac{2}{7}\\ -\frac{12}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}6 & 2\\ -12 & 3\end{bmatrix}$

5. $E^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & 1 & -3\\ -1 & 1 & 3\\ 3 & 3 & -3\end{bmatrix}$

6. $F^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{5}{24} & -\frac{7}{12} & -\frac{1}{8}\end{bmatrix}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}-3 & 18 & -3\\ 6 & -12 & 6\\ 5 & -14 & -3\end{bmatrix}$

7. $G^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{17} & \frac{2}{17} & \frac{3}{17}\\ \frac{1}{17} & -\frac{11}{34} & -\frac{4}{17}\\ \frac{1}{17} & \frac{3}{17} & -\frac{4}{17}\end{bmatrix}=\frac{1}{34}\begin{bmatrix}-10 & 4 & 6\\ 2 & -11 & -8\\ 2 & 6 & -8\end{bmatrix}$

8. $H^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10}\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2 & -1 & -3\\ -2 & 6 & 18\\ -2 & 6 & 8\end{bmatrix}$

9. $J^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{43}{6} & \frac{49}{6} & -\frac{19}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{67}{6} & -\frac{79}{6} & \frac{31}{6} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{16}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}43 & 49 & -19 & 1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -67 & -79 & 31 & -1\\ -32 & -38 & 14 & -2\end{bmatrix}$

EJERCICIO 166

1. $\begin{cases}x=5\\ y=-2\end{cases}$

2. $\begin{cases}m=-4\\ n=2\end{cases}$

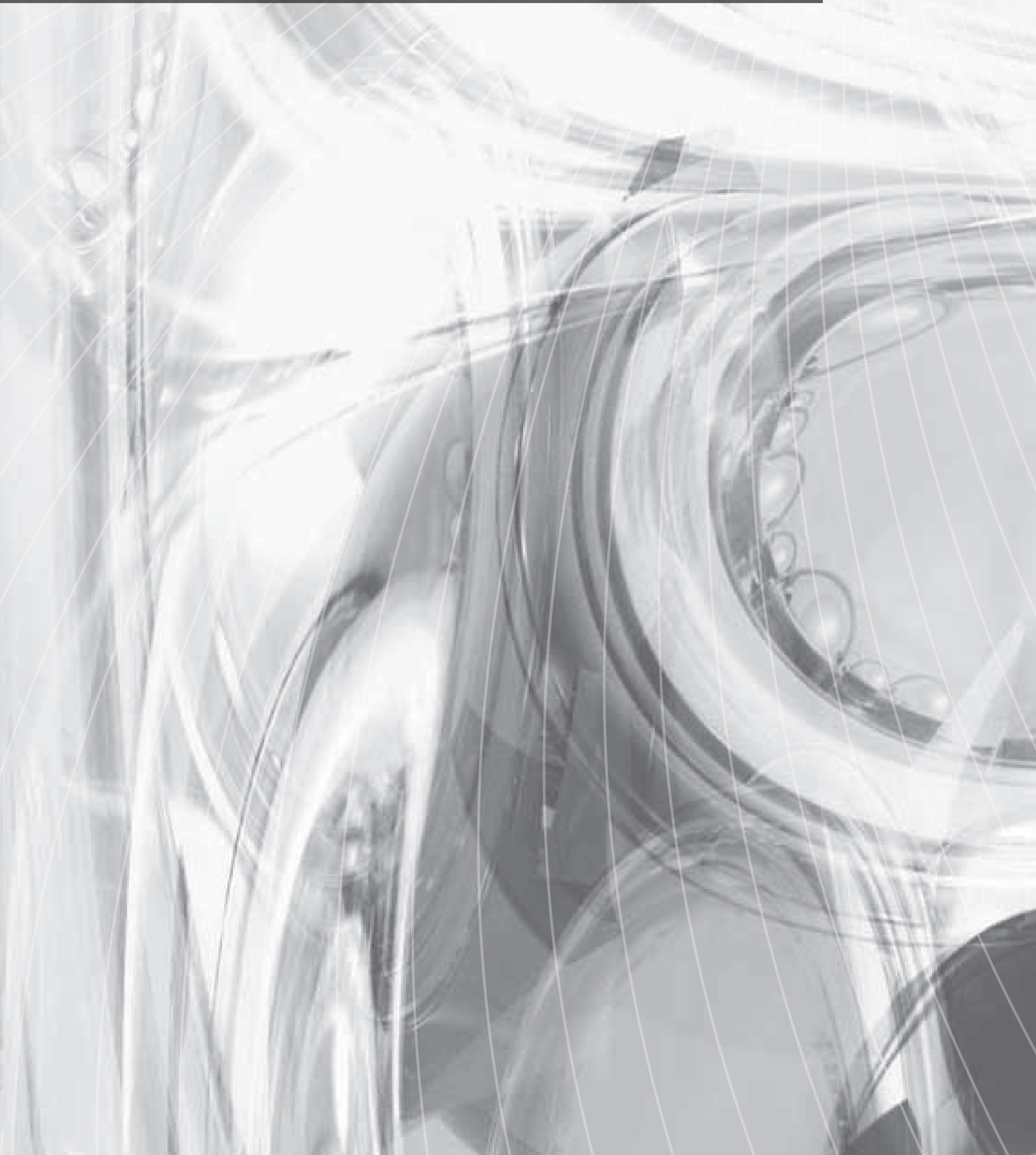
3. $\begin{cases}a=11\\ b=-10\end{cases}$

4. $\begin{cases}a=4\\ b=-3\\ c=2\end{cases}$

5. $\begin{cases}x=5\\ y=2\\ z=-1\end{cases}$

6. $\begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=-2\end{cases}$

Anexo B: Ejercicios preliminares



Operaciones con números enteros:

1. $6 - 4$
2. $-8 + 6$
3. $3 + 7$
4. $-5 - 7$
5. $-2 - 5 + 6 + 4$
6. $-3 - 6 - 8 + 5 + 4 + 7$
7. $8 + 6 + 3 - 5 - 9 - 2$
8. $4 + 5 - 1 + 2 - 7 - 3$
9. $-2 + 6 - 8 - 12 + 10 - 3 - 7$
10. $1 - 5 + 9 - 3 + 16 - 8 + 13$
11. $3(-2)$
12. $(-5)(-4)$
13. $-6(5)$
14. $(4)(3)(5)$
15. $2(-4)(-3)$
16. $3-(-4)$
17. $\frac{-12}{3}$
18. $\frac{15}{-5}$
19. $\frac{-28}{-14}$
20. $-(-3)+(5)-2(-1)+(-4)+7$
21. $(-2)+(+5)$
22. $-4-(6+8-2)$
23. $7-(5+3)-(-1-9+4)+(-8)$
24. $5-(-4-3)-(7+2-1)$
25. $6 - 2(1 - 3 - 4) + (5 - 2 + 7)$
26. $\frac{13+15}{7}$
27. $\frac{-3-12-5}{10}$
28. $\frac{30+6}{9+3}$
29. $\frac{14-2}{2+4}$
30. $\frac{8+5+7}{6-3-7}$
31. $\frac{2(5-7)+20}{5+3}$
32. $\frac{(4-3)+3(2+4-1)}{5(4)-6(3)}$

Descompón en factores primos los siguientes números:

33. 6
34. 8
35. 20
36. 50
37. 72
38. 120
39. 225
40. 460
41. 325
42. 576
43. 980
44. 1000
45. 1120
46. 1800

Determina el *MCD* de los siguientes números:

47. 24, 36 y 42
48. 20, 35 y 70
49. 32, 28 y 72
50. 18, 24, 72 y 144
51. 12, 28, 44 y 120

Determina el *mcm* de los siguientes números:

52. 3, 10, 12
53. 8, 9, 12 y 18
54. 2, 3, 6 y 12
55. 8, 12, 16 y 24
56. 4, 6, 15 y 18

Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

57. $\frac{3}{2}+\frac{7}{2}$

58. $\frac{4}{5}+\frac{8}{5}$

59. $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{1}{7}$

60. $\frac{9}{4}+\frac{3}{4}+\frac{7}{4}$

61. $\frac{5}{11}+\frac{6}{11}+\frac{15}{11}+\frac{8}{11}$

62. $2\frac{1}{3}+5\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$

63. $\frac{17}{5}-\frac{9}{5}$

64. $\frac{13}{6}-\frac{7}{6}$

65. $2\frac{1}{4}-\frac{7}{4}$

66. $1\frac{3}{8}-3\frac{1}{8}+2\frac{7}{8}$

67. $3\frac{2}{7}-\frac{12}{7}-\frac{18}{7}$

68. $1\frac{3}{4}+3\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}-\frac{3}{4}$

69. $\frac{1}{6}+\frac{3}{2}$

70. $\frac{7}{4}+\frac{1}{8}$

71. $\frac{7}{12}+\frac{5}{3}$

72. $1+\frac{2}{3}$

73. $2+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$

74. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$

75. $\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}$

76. $\frac{5}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{24}$

77. $\frac{8}{5}+\frac{4}{15}-\frac{2}{9}$

78. $1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$

79. $1\frac{3}{4}+2\frac{2}{6}+3\frac{1}{2}$

80. $5\frac{1}{3}-2\frac{5}{7}+4$

81. $\frac{6}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{15}-\frac{7}{20}$

82. $2-1\frac{1}{3}-\frac{5}{12}$

83. $4\frac{1}{4}-\frac{13}{6}$

84. $\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-3\frac{5}{6}$

85. $\frac{1}{4}\times\frac{9}{7}$

86. $\frac{7}{6}\times\frac{5}{8}$

87. $\frac{4}{3}\times\frac{3}{8}$

88. $\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}$

89. $2\frac{3}{5}\times\frac{9}{8}$

90. $\frac{3}{5}\times 3\frac{1}{4}$

91. $1\frac{1}{3}\times 2\frac{3}{8}$

92. $\frac{1}{3}\times\frac{13}{6}\times\frac{10}{78}$

93. $\frac{4}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{8}$

94. $\frac{4}{3}\times\frac{1}{20}\times\frac{5}{16}\times 15$

95. $\frac{1}{5}\div\frac{2}{15}$

96. $\frac{5}{4}\div\frac{1}{2}$

97. $\frac{5}{6}\div\frac{4}{3}$

98. $\frac{4}{15}\div\frac{1}{6}$

99. $2\frac{1}{4} \div \frac{9}{8}$

100. $\frac{1}{6} \div 2\frac{1}{4}$

101. $\frac{4}{3} \div 5$

102. $4 \div \frac{12}{5}$

Efectúa las siguientes operaciones:

103. 6^2

104. 4^3

105. $(-2)^4$

106. $(-3)^3$

107. -5^2

108. $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$

109. $-\left(\frac{3}{2}\right)^4$

110. $\sqrt{4}$

111. $\sqrt{25}$

112. $\sqrt{81}$

113. $\sqrt{64}$

114. $\sqrt[3]{8}$

115. $\sqrt[3]{27}$

116. $\sqrt[4]{16}$

117. $\sqrt[5]{32}$

118. $\sqrt[5]{243}$

119. $\sqrt{\frac{18}{2}}$

120. $\sqrt{\frac{75}{3}}$

121. $\sqrt{\frac{80}{5}}$

122. $\sqrt{\frac{1}{9}}$

123. $\sqrt{\frac{64}{25}}$

124. $\sqrt{\frac{36}{49}}$

125. $\sqrt{\frac{9}{121}}$

Racionaliza las siguientes expresiones:

126. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

127. $\frac{1}{\sqrt{7}}$

128. $\frac{2}{\sqrt{2}}$

129. $\frac{4}{\sqrt{6}}$

130. $\frac{6}{\sqrt{5}}$

131. $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

132. $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

133. $\frac{6}{4\sqrt{3}}$

134. $\frac{2}{5\sqrt{5}}$

135. $\frac{14}{2\sqrt{7}}$

136. $\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

137. $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$

138. $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$

139. $\frac{6}{3-\sqrt{7}}$

140. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

141. $\dfrac{3-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

142. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

143. $\dfrac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Expresa en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

144. Un número aumentado en 6.
145. El triple de un número
146. El doble de un número disminuido en 5.
147. El producto de dos números.
148. Un número excedido en 8.
149. Las tres cuartas partes de un número.
150. La diferencia de dos cantidades.
151. El cociente de dos números.
152. Dos números cuya suma es 45.
153. El cuadrado de una cantidad.
154. La diferencia de los cuadrados de dos números.
155. El cuadrado de la diferencia de dos cantidades.
156. La mitad de la suma de dos números.
157. Las dos terceras partes de la diferencia de dos números.
158. La raíz cuadrada de la suma de dos cantidades.
159. Dos números enteros consecutivos.
160. Dos números enteros pares consecutivos.
161. El quíntuple de un número aumentado en 3 unidades equivale a 18.
162. Las dos terceras partes de un número disminuidas en 4 equivalen a 6.

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones, si $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$, $w = -4$

163. $4x - 2$
164. $6y + 8$
165. $4z - 3w$
166. $3x - 2y$
167. $y + 3z$
168. $2x + 3y - z$
169. $4x + y + 2w$
170. $5x - 3y + 2w$
171. $2(x - y)$
172. $5x - 3(2z - w)$
173. $4(x - y) - 3(z - w)$
174. $1 - 3(x - y) + 2(3w - z)$
175. $x^2 + 3xz - w^2$
176. $\dfrac{x^2+z}{y-w}$
177. $\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{w}+\dfrac{1}{6}$
178. $(x+y)^2-(3z+w)^2$
179. $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{y^3}{4}+z^3-\dfrac{w^3}{4}$
180. $\sqrt{x^2+w^2}$
181. $y^x - w^z$
182. $\dfrac{2xyz}{w}$
183. $\dfrac{3x-y+2z}{w-1}$

Reduce las siguientes expresiones:

184. $4x - 7x + 2x$

185. $9y + 3y - y$

186. $5ab^2 + 7ab^2 - 16ab^2$

187. $4x^4yz^3 - 6x^4yz^3 + 7x^4yz^3$

188. $5x - 3y + 2z - 7x + 8y - 5z$

189. $14a - 8b + 9a + 2b - 6a + b$

190. $7m^2 - 10m^2 + 8m^2 - m^2$

191. $4x^2 - 5xy + 3y^2 - 3x^2 + 4xy + 3y^2$

192. $-3a^2 + 5b^2 + 8c^2 + 4a^2 - 3b^2 - 7c^2$

193. $ab^2 + 2bc^2 + 3ab^2 - 2bc^2 - 4ab^2$

194. $5x^2y^3 + 2xy^2 - 3y^4 + 4xy^2 - 2x^2y^3 - 2xy^2$

195. $-m^2 + 7n^3 - 9m^2 - 13n^3 + 5m^2 - n^3$

196. $8a^2 - 15ab + 12b^2 + 2a^2 + 6ab - 14b^2 + 5a^2 + 8ab + 17b^2$

197. $\frac{1}{4}ab^3c^4 - \frac{3}{4}ab^3c^4 - ab^3c^4$

198. $\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y - z - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{9}z$

199. $-\frac{5}{3}a^2b - \frac{7}{2}ab^2 + \frac{1}{4}a^2b + 5ab^2 - 6a^2b - \frac{1}{3}ab^2$

200. $\frac{x^2}{8} + \frac{4xy}{9} - \frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} - \frac{2xy}{3} + \frac{6y^2}{5}$

Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

201. $(5x - 7y - 2z) + (x - y + 7z)$

202. $(3x^2 + 2xy - 5y^2) + (-2x^2 + 3xy - y^2)$

203. $(x^2 + 2x - 1) + (3x^2 - 2x + 3)$

204. $(x^3 - 3x - 4) + (x^2 + 2x + 3)$

205. $(3x^3 + 2x^2 - 5x + 6) + (-2x^3 - x^2 + 7x + 1)$

206. $(x^2 + 6xy + 4y^2) + (5x^2 - 3xy - 4y^2)$

207. $(x^3 + x^2y + 5xy^2 - 2y^3) + (-3x^2y - 6xy^2 + 8y^3)$

208. $\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{6}x - 3\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right)$

209. $\left(\frac{1}{6}x^3 - 1\right) + \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + x - \frac{3}{4}\right)$

210. $\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 1\right) + \left(\frac{1}{7}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{3}x^4 + 3x^3 - 2x^2 - \frac{1}{5}x - 5\right)$

211. $(2x - 8y - 5z) - (x - 6y - 4z)$

212. $(6x^2 + x - 5) - (3x^2 - x - 5)$

213. $(4x^3 - 5x^2 + 6x + 7) - (2x^3 - 6x^2 + 4x + 4)$

214. $\left(x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{6} - 1\right) - \left(\frac{x^3}{4} - \frac{x}{6} + \frac{3x^2}{8} - \frac{4}{5}\right)$

215. $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{3}{7}\right) - \left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{5}{8}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{14}\right)$

216. $(3xy)(-5xy)$

217. $(6x^2y^5z^3)(-3x^5y^4z^2)$

218. $(a^5c^2)(4a^4bc^6)$

219. $(3x^2y^3)(-2x^5y^4)$

220. $-6xy^3(4x^2y)$

221. $(2a^3b^4c)(-5a^2bc^3)$

222. $\left(\frac{2}{5}x^2yz\right)\left(-\frac{15}{4}yz^3\right)$

223. $(12a^4b^9c^3)\left(-\frac{2}{3}a^5b^3c\right)$

224. $\left(\frac{1}{5}a^3b^2c\right)\left(\frac{2}{3}a^4bc^2\right)\left(\frac{1}{2}ac\right)\left(\frac{3}{2}a^4b^2\right)$

225. $\left(\frac{3}{4}a^2b^3c\right)\left(-\frac{2}{6}a^5c^2\right)$

226. $(3m^3n)(5m^2 - 9mn)$

227. $(4a^2b^5)(-3ab^2 + 2a^3b^4)$

228. $(2a^2b)(5a^2 - 7ab + 3b^2)$

229. $(-a)(7a^4 - a^3 + 7a - 5)$

230. $-3a^4b^5(a^3 + 4a^2b - ab^2 - 5b^3)$

231. $(4xy)(5x^3 - 6x^2 - 7x)$

232. $(-5a^2b)(a^2 - 3ab + 9b^2)$

233. $(4x^5y^2)(6x^3y^2 - 7x^2y^3 + 4xy^5)$

234. $(3x - 5)(x + 7)$

235. $(a + 6)(a - 9)$

236. $(-2x + 7)(4 - 3x)$

237. $(x^2 - 6x - 8)(3x^2 - 8x + 1)$

238. $(7x^3 - 4x^2y + xy^2)(2x^2y - 4xy^2 + 4y^3)$

239. $\dfrac{6a^4b^7}{2a^2b^5}$

240. $\dfrac{18x^6y^3}{-3x^5y^3}$

241. $\dfrac{18a^3b^2c^4}{12ab^2c^3}$

242. $-\dfrac{2}{5}x^3y \div -\dfrac{3}{5}x^2y$

243. $\dfrac{3x^2 + 6x}{2x}$

244. $\dfrac{9a^2b - 6a^3}{2a^2}$

245. $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 5x}{x}$

246. $\left(\dfrac{1}{3}a^5b^8 - \dfrac{1}{2}a^3b^5 - 4a^3b^4\right) \div 3a^3b$

Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

247. $(x + 3)^2$

248. $(a - 4)^2$

249. $(y - 6)^2$

250. $(x + 5)^2$

251. $(2m - 5)^2$

252. $(3x - 1)^2$

253. $(3x + 4)^2$

254. $(3 - 2x)^2$

255. $(5x + 4y^3)^2$

256. $(9x^3 - x^2y)^2$

257. $\left(x + \dfrac{2}{5}\right)^2$

258. $\left(y - \dfrac{1}{3}\right)^2$

259. $\left(\dfrac{x}{2} - 3y^2\right)^2$

260. $\left(\dfrac{2}{a} - \dfrac{b^2}{3}\right)^2$

Obtén el resultado del producto de binomios conjugados:

261. $(x + 5)(x - 5)$

262. $(m - 3)(m + 3)$

263. $(x + 6)(x - 6)$

264. $(y - 1)(y + 1)$

265. $(7 - x)(7 + x)$

266. $(5 + 4x)(5 - 4x)$

267. $(3x + 5y)(3x - 5y)$

268. $(a - 4b)(a + 4b)$

269. $(3xy - 2z)(3xy + 2z)$

270. $(m - 5n)(m + 5n)$

271. $(3p + 5q)(3p - 5q)$

272. $\left(\dfrac{5}{3}x - \dfrac{2}{5}y\right)\left(\dfrac{5}{3}x + \dfrac{2}{5}y\right)$

273. $\left(\dfrac{m}{2} + \dfrac{n}{3}\right)\left(\dfrac{m}{2} - \dfrac{n}{3}\right)$

274. $\left(\dfrac{1}{2x} + \dfrac{3}{5y}\right)\left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{5y}\right)$

Desarrolla los siguientes cubos de binomios:

275. $(x+1)^3$
276. $(y-2)^3$
277. $(x+3)^3$
278. $(a-4)^3$
279. $(5-x)^3$
280. $(3x-2)^3$
281. $(x+2y)^3$
282. $(4x-3y)^3$
283. $(1-5xy)^3$
284. $\left(\frac{1}{2}x+y\right)^3$
285. $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)^3$
286. $\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)^3$

Factoriza las siguientes expresiones empleando el factor común:

287. $4x-12$
288. $3x+15$
289. $24x^2-36x$
290. $8xy-16y$
291. $3x^2-6x$
292. y^3+y^2
293. $m^5+m^4-m^2$
294. $8x^3-24x^2+16x$
295. $15a^2+25a^3-35a^4$
296. $6a^2b-3ab$
297. $12x^2y-18xy^2$
298. $4x^2y^3-8x^3y^4+5x^4y^5$
299. $18a^5b-9a^3b^2-6a^2b^3+12ab^4$
300. $33x^2y^3z^4+66x^2y^3z^3-22x^2y^3z^2$

Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados:

301. x^2-1
302. y^2-9
303. x^2-16
304. $4x^2-25$
305. $25-x^2$
306. $16x^2-9$
307. $81-4y^2$
308. $100-x^2$
309. $25m^4-81n^2$
310. $9x^4-y^4$
311. $\frac{1}{16}x^2-\frac{9}{49}y^2$
312. $\frac{1}{4}z^2-\frac{9}{25}w^2$
313. $y^2-\frac{36}{25}z^6$
314. $\frac{x^2}{9}-\frac{16}{25y^2}$

Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

315. x^2+2x+1
316. y^2-4y+4
317. a^2+6a+9
318. $x^2-10x+25$
319. $a^2-2ab+b^2$
320. $y^2+12y+36$
321. $m^2+2mn^2+n^4$
322. $16x^2+8x+1$
323. $9y^2-24y+16$
324. $x^2+x+\frac{1}{4}$
325. $y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}$
326. $\frac{x^2}{4}+4x+16$
327. $\frac{m^2}{9}-\frac{2m}{n}+\frac{9}{n^2}$
328. $x^2-x+\frac{1}{4}$
329. $144x^2+120xy+25y^2$

Factoriza los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

330. $x^2 + 3x + 2$
331. $x^2 - 5x + 6$
332. $x^2 + 9x + 20$
333. $x^2 - 14x + 24$
334. $m^2 + 7m + 12$
335. $x^2 - 9x + 18$
336. $a^2 + 4a - 12$
337. $y^2 + y - 20$
338. $n^2 - 2n - 63$
339. $z^2 - 18 - 7z$
340. $x^2 - 8x - 48$
341. $x^2 + x - 132$
342. $a^2 - 2a - 35$
343. $y^2 + 2y - 168$

Factoriza los siguientes trinomios $ax^2 + bx + c$

344. $3x^2 - 14x + 8$
345. $6a^2 + 7a + 2$
346. $4x^2 - 13x + 3$
347. $5x^2 - 7x + 2$
348. $2x^2 - 5x - 12$
349. $6m^2 + 11m + 3$
350. $6b^2 + 5b - 25$
351. $2x^2 - 3x - 2$
352. $5y^2 - 12y + 4$
353. $4x^2 - 5x - 6$
354. $7y^2 + 16y - 15$
355. $20x^2 - x - 1$

Factoriza los siguientes trinomios $ax^2 + bx + c$

356. $x^3 + 1$
357. $y^3 - 8$
358. $x^3 - 64$
359. $y^3 + 27$
360. $64 - 27x^3$
361. $x^3 + 8y^3$
362. $125x^3 - y^3$
363. $8x^6 + 27y^6$
364. $1 - x^9y^9$
365. $\frac{x^3}{8} + \frac{1}{125}$
366. $\frac{x^3}{27} + \frac{64}{x^3}$
367. $\frac{1}{x^3} - \frac{8}{y^3}$

Simplifica las siguientes expresiones

368. $\frac{3x}{2x^2}$
369. $\frac{4x\,y^3}{2x^2\,y^2}$
370. $\frac{x^2\,(x-5)}{5x^2}$
371. $\frac{x\,(3-x)}{3-x}$
372. $\frac{(x-2)\,(x+1)}{x-2}$
373. $\frac{x-1}{(1-x)\,x}$
374. $\frac{x^2\,(3x+2)}{x\,(3x+2)}$
375. $\frac{x^2+3x+2}{x+1}$
376. $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$
377. $\frac{x^2-2x}{x^2-6x+8}$
378. $\frac{9x^2-4}{6x^2-x-2}$
379. $\frac{8x^3-1}{4x^2-4x+1}$

Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

380. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+h}$

381. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a+h}$

382. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

383. $\frac{a}{x-h}+\frac{a}{x+h}$

384. $\frac{b}{y-2}+\frac{b}{y+2}$

385. $\frac{a}{a+1}+\frac{a}{1-a}$

386. $\frac{x}{x-1}+\frac{x+h}{x-h-1}$

387. $\frac{x+h+1}{x+h-1}+\frac{x+1}{x-1}$

388. $\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x-h}$

389. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+h}$

390. $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a}$

391. $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$

392. $\frac{2}{y}-\frac{3}{y-h}$

393. $\frac{x}{x+1}-\frac{x+h}{x+h+1}$

394. $\frac{a}{x+h+1}-\frac{a}{x+h-1}$

395. $\frac{x+h+1}{x+h-1}-\frac{x+1}{x-1}$

396. $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+h}\right)$

397. $\left(\frac{1}{x-h}\right)\left(\frac{1}{x+h}\right)$

398. $\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)$

399. $\left(\frac{a}{x}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}\right)$

400. $\left(\frac{1}{x+1}\right)(x^2-1)$

401. $\left(\frac{1}{x}\right)(x^2+x)$

402. $\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)$

403. $\frac{1}{x-h}\div\frac{1}{x+h}$

404. $\frac{1}{x-h}\div\frac{1}{x}$

405. $\frac{a}{x}\div\frac{a^2}{x^2}$

406. $\frac{1}{x-h}\div\frac{1}{x^2-h^2}$

407. $\frac{1}{x^2+x}\div\frac{1}{x}$

408. $\frac{x-2}{x+1}\div\frac{x^2-4}{x^2-1}$

409. $\frac{1}{x^2-1}\div\frac{1}{x+1}$

410. $\frac{x}{x-a}\div\frac{x^2}{x^2-a^2}$

Expresa como exponentes fraccionarios los siguientes radicales:

411. $\sqrt{x}$

412. $\sqrt{3x}$

413. $\sqrt{x^3}$

414. $\sqrt{(5x)^5}$

415. $\sqrt[3]{2a}$

416. $\sqrt[4]{5x^3\,y^4}$

417. $\sqrt{x+2}$

418. $\sqrt[4]{a+b}$

419. $\sqrt[5]{(2x-3)^2}$

420. $\sqrt[7]{5x+3y}$

Expresa como radical las siguientes expresiones:

421. $x^{\frac{2}{3}}$
422. $x^{\frac{1}{4}}$
423. $(6x)^{\frac{1}{3}}$
424. $(4x^3y^5)^{\frac{4}{3}}$
425. $\left(\dfrac{2}{xy^3}\right)^{\frac{1}{5}}$
426. $(x+8)^{\frac{1}{2}}$
427. $(3x+1)^{\frac{1}{6}}$
428. $(2a-5b)^{\frac{2}{3}}$
429. $\left(\dfrac{2-x}{x+y}\right)^{\frac{3}{5}}$

Aplica los teoremas correspondientes de exponentes y radicales para simplificar las siguientes expresiones:

430. $(x^3)^4$
431. $(4x^2)^3$
432. $(5xy^4)^2$
433. x^{-3}
434. $(2xy)^{-2}$
435. $\left(\dfrac{2x^3}{3y^2}\right)^5$
436. $\sqrt{x^4}$
437. $\sqrt{16x^2y^4}$
438. $\sqrt{\dfrac{25}{49}x^6y^2}$
439. $\sqrt[3]{27x^3y^6}$
440. $\sqrt{x^3}$
441. $\sqrt[3]{x^5}$
442. $\sqrt{(ax)^3}$
443. $\sqrt{(3x)^5}$
444. $\sqrt{32x^3}$
445. $\sqrt[3]{16x^5}$
446. $\sqrt{125x^3}$
447. $\sqrt{(x^2+1)^3}$
448. $\sqrt[4]{(x+a)^5}$

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

449. $x + 6 = 4$
450. $y - 2 = 0$
451. $3x = 15$
452. $4x - 5 = 3$
453. $2x + 5 = 6x$
454. $6x - 2 = 2x - 12$
455. $4 + 9x - 11x = 6x + 8$
456. $8x = -3 + 5x$
457. $9 - 10x = 7x + 8x$
458. $3(x - 5) + 3 = 10$
459. $5 + 2(4x - 1) = 0$
460. $6(1 - x) - 2(x - 2) = 10$
461. $3(9 + 4x) - 9 = 18$
462. $3(4x + 9) = 6 + 5(2 - x)$
463. $\dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}x - 1$
464. $\dfrac{x}{12} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{4}$
465. $\dfrac{1}{4} - \dfrac{7x}{8} = 3 - \dfrac{x}{4}$
466. $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{2}x = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{3x}{8}$
467. $-\dfrac{13}{3} - \dfrac{17x}{12} = x - 1\dfrac{2}{3}$
468. $\dfrac{3}{2}(2x - 1) - \dfrac{4}{5}(x + 2) = \dfrac{3}{4}(x + 1)$
469. $\dfrac{x+4}{4} - \dfrac{x}{2} = 5$
470. $\dfrac{2x-3}{6} + \dfrac{x}{4} = 2$

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

471. $x^2 + 4x + 3 = 0$
472. $x^2 - 5x + 6 = 0$
473. $x^2 + 7x + 12 = 0$
474. $x^2 - 14x + 24 = 0$
475. $x^2 + 9x + 20 = 0$
476. $y^2 - y - 56 = 0$
477. $x^2 + 4x - 12 = 0$
478. $x^2 - 9x + 18 = 0$
479. $x^2 - 2x - 63 = 0$
480. $y^2 + y - 20 = 0$
481. $a^2 + 2a = 48$
482. $5x^2 - 7x + 2 = 0$
483. $2x^2 - 5x - 12 = 0$
484. $7x^2 + 16x = 15$
485. $6x^2 + 7x = -2$
486. $20x^2 - x - 1 = 0$

Resuelve los siguientes sistemas:

487. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

488. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

489. $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$

490. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 6y = -2 \end{cases}$

491. $\begin{cases} 4x - 26 = y \\ 3x + 5y - 31 = 0 \end{cases}$

492. $\begin{cases} 2x = y \\ x = y + 2 \end{cases}$

493. $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 5x + 3y = 21 \end{cases}$

494. $\begin{cases} 6x + 2y = 2 \\ 5x - 3y = 11 \end{cases}$

495. $\begin{cases} 5x + 8y = -1 \\ 6y - x = 4y - 7 \end{cases}$

496. $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = -8 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$

497. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x - 3y - 2z = 16 \\ 3x + 2y + 5z = -7 \end{cases}$

498. $\begin{cases} 5x + y - 2z = -6 \\ 3x + 4y + 2z = 13 \\ 2x - y - 3z = -11 \end{cases}$

499. $\begin{cases} 6x + 2y + z = -18 \\ x - 3y - 4z = -3 \\ 4x + 2y + 3z = -6 \end{cases}$

500. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ 6x - 6y + z = 5 \\ 6x + 12y - 6z = -1 \end{cases}$

501. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2z = -1 \\ 3y - z = 5 \end{cases}$

502. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y - 2z = 1 \\ 4x + 3z = 6 \end{cases}$

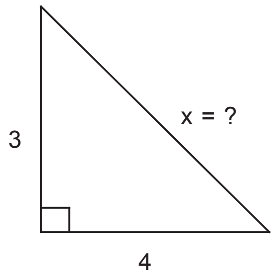
503. $\begin{cases} x - 3 = 0 \\ y^2 + 2y - x = 0 \end{cases}$

504. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + y = 8 \end{cases}$

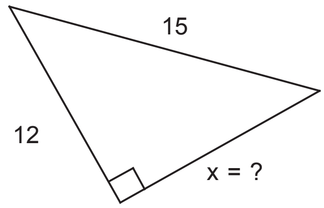
505. $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 - 3y - 7 = 0 \end{cases}$

Aplica el teorema de Pitágoras para determinar el valor de "x" en los siguientes triángulos rectángulos:

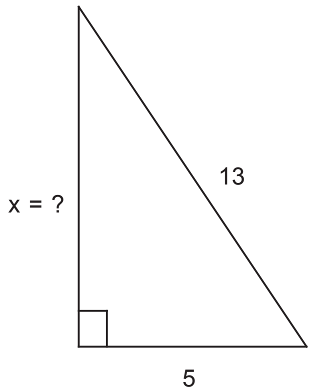
506.



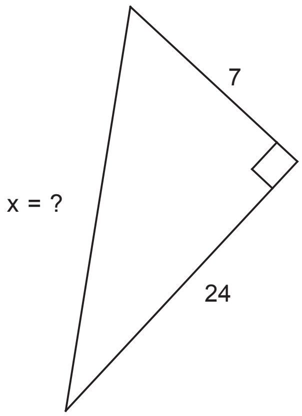
509.



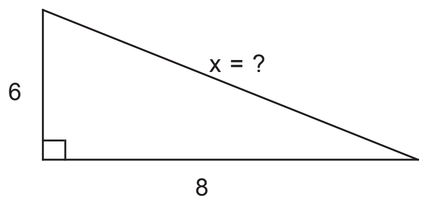
507.



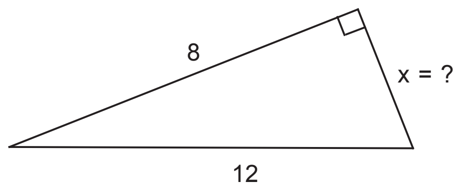
510.



508.

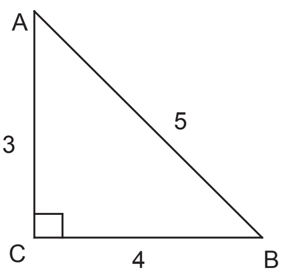


511.

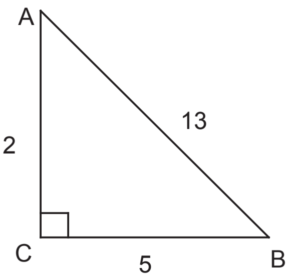


Escribe las funciones trigonométricas correspondientes a los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos:

512.



513.



Determina las ecuaciones de las siguientes rectas:

514. Pasa por el punto (2, 3) y su pendiente es 4.

515. Pasa por el origen y su pendiente es –3.

516. Pasa por el punto (–1, 2) y su pendiente es la unidad.

517. Pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ y su pendiente es 2.

518. Pasa por el punto (6, 5) y es paralela al eje *x*.

519. Pasa por el punto $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$ y es paralela al eje *y*.

520. Pasa por los puntos (2, –3) y (5, 1).

521. Pasa por los puntos (–2, –1) y (1, 2).

522. Pasa por los puntos (0, –2) y (3, 5).

523. Pasa por los puntos $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

524. Pasa por los puntos $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ y $\left(2, \frac{5}{6}\right)$.

Operaciones con números enteros:

1. 2
2. –2
3. 10
4. –12
5. 3
6. –1
7. 1
8. 0
9. –16
10. 23
11. –6
12. 20
13. –30
14. 60
15. 24
16. 7
17. –4
18. –3
19. 2
20. 13
21. 3
22. –16
23. –3
24. 4
25. 28
26. 4
27. –2
28. 3
29. 2
30. –5
31. 2
32. 8

Descompón en factores primos los siguientes números:

33. 2×3
34. 2^3
35. $2^2\times 5$
36. 2×5^2
37. $2^3\times 3^2$
38. $2^3\times 3\times 5$
39. $3^2\times 5^2$
40. $2^2\times 5\times 23$
41. $5^2\times 13$
42. $2^6\times 3^2$
43. $2^2\times 5\times 7^2$
44. $2^3\times 5^3$
45. $2^5\times 5\times 7$
46. $2^3\times 3^2\times 5^2$

Determina el *MCD* de los siguientes números:

47. $2\times 3=6$
48. 5
49. $2^2=4$
50. $2\times 3=6$
51. $2^2=4$

Determina el *mcm* de los siguientes números:

52. $2^2\times 3\times 5=60$
53. $2^3\times 3^2=72$
54. $2^2\times 3=12$
55. $2^4\times 3=48$
56. $2^2\times 3^2\times 5=180$

Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

57. 5
58. $\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$
59. $\frac{6}{7}$
60. $\frac{19}{4}=4\frac{3}{4}$
61. $\frac{34}{11}=3\frac{1}{11}$
62. $\frac{29}{3}=9\frac{2}{3}$
63. $\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$
64. 1
65. $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
66. $\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$
67. –1
68. $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$
69. $\frac{10}{6}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$
70. $\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$
71. $\frac{27}{12}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$
72. $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$
73. $\frac{17}{6}=2\frac{5}{6}$
74. 1
75. $\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$
76. $\frac{93}{24}=\frac{31}{8}=3\frac{7}{8}$
77. $\frac{74}{45}=1\frac{29}{45}$
78. $\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}$
79. $\frac{91}{12}=7\frac{7}{12}$
80. $\frac{139}{21}=6\frac{13}{21}$
81. $\frac{32}{60}=\frac{8}{15}$
82. $\frac{1}{4}$
83. $\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}$
84. $-\frac{44}{12}=-\frac{11}{3}=-3\frac{2}{3}$
85. $\frac{9}{28}$
86. $\frac{35}{48}$
87. $\frac{1}{2}$
88. $\frac{1}{9}$
89. $\frac{117}{40}=2\frac{37}{40}$
90. $\frac{39}{20}=1\frac{19}{20}$
91. $\frac{19}{6}=3\frac{1}{6}$
92. $\frac{5}{54}$
93. $\frac{1}{18}$
94. $\frac{5}{16}$
95. $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$
96. $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$
97. $\frac{5}{8}$
98. $\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$
99. 2
100. $\frac{2}{27}$
101. $\frac{4}{15}$
102. $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$

Efectúa las siguientes operaciones:

103. 36
104. 64
105. 16
106. – 27
107. – 25
108. $\frac{81}{16}$
109. $-\frac{81}{16}$
110. 2
111. 5
112. 9
113. 8
114. 2
115. 3
116. 2
117. 2
118. 3
119. 3
120. 5
121. 4
122. $\frac{1}{3}$
123. $\frac{8}{5}$
124. $\frac{6}{7}$
125. $\frac{3}{11}$

Racionaliza las siguientes expresiones:

126. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
127. $\frac{\sqrt{7}}{7}$
128. $\sqrt{2}$
129. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
130. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$
131. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
132. $\frac{\sqrt{2}}{6}$
133. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
134. $\frac{2\sqrt{5}}{25}$
135. $\sqrt{7}$
136. $\sqrt{5}-1$
137. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
138. $\sqrt{3}-1$
139. $9+3\sqrt{7}$
140. $\sqrt{3}-2$
141. $-1-2\sqrt{2}$
142. $5-2\sqrt{6}$
143. $\frac{13+4\sqrt{10}}{9}$

Expresa en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

144. $x + 6$
145. $3x$
146. $2x - 5$
147. xy
148. $x + 8$
149. $\frac{3x}{4}$
150. $x - y$
151. $\frac{x}{y}$
152. $x, 45 - x$
153. x^2
154. $x^2 - y^2$
155. $(x - y)^2$
156. $\frac{x + y}{2}$
157. $\frac{2}{3}(x - y)$
158. $\sqrt{x + y}$
159. $x, x + 1$
160. $2x, 2x + 2$
161. $5x + 3 = 18$
162. $\frac{2}{3}x - 4 = 6$

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones, si $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$, $w = -4$

163. 10
164. –4
165. 16
166. 13
167. 1
168. –1
169. 2
170. 13
171. 10
172. –3
173. 5
174. –40
175. 2
176. 5
177. $-\frac{13}{12}$
178. 0
179. 24
180. 5
181. –4
182. 3
183. $-\frac{13}{5}$

Reduce las siguientes expresiones:

184. $-x$
185. $11y$
186. $-4ab^2$
187. $5x^4yz^3$
188. $-2x + 5y - 3z$
189. $17a - 5b$
190. $4m^2$
191. $x^2 - xy + 6y^2$
192. $a^2 + 2b^2 + c^2$
193. 0
194. $3x^2y^3 + 4xy^2 - 3y^4$
195. $-5m^2 - 7n^3$
196. $15a^2 - ab + 15b^2$
197. $-\frac{3}{2}ab^3c^4$
198. $\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}y - \frac{4}{9}z$
199. $-\frac{89}{12}a^2b + \frac{7}{6}ab^2$
200. $-\frac{x^2}{8} - \frac{2xy}{9} + y^2$

Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

201. $6x - 8y + 5z$
202. $x^2 + 5xy - 6y^2$
203. $4x^2 + 2$
204. $x^3 + x^2 - x - 1$
205. $x^3 + x^2 + 2x + 7$
206. $6x^2 + 3xy$
207. $x^3 - 2x^2y - xy^2 + 6y^3$
208. $\frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{5}{2}$
209. $-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{9}{8}$
210. $\frac{11}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{7}x^2 + \frac{13}{10}x - \frac{19}{4}$
211. $x - 2y - z$
212. $3x^2 + 2x$
213. $2x^3 + x^2 + 2x + 3$
214. $\frac{3}{4}x^3 - \frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{5}$
215. $-\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x + \frac{5}{14}$
216. $-15x^2y^2$
217. $-18x^7y^9z^5$
218. $4a^9bc^8$
219. $-6x^7y^7$
220. $-24x^3y^4$
221. $-10a^5b^5c^4$
222. $-\frac{3}{2}x^2y^2z^4$
223. $-8a^9b^{12}c^4$
224. $\frac{1}{10}a^{12}b^5c^4$
225. $-\frac{1}{4}a^7b^3c^3$
226. $15m^5n - 27m^4n^2$
227. $-12a^3b^7 + 8a^5b^9$
228. $10a^4b - 14a^3b^2 + 6a^2b^3$
229. $-7a^5 + a^4 - 7a^2 + 5a$
230. $-3a^7b^5 - 12a^6b^6 + 3a^5b^7 + 15a^4b^8$
231. $20x^4y - 24x^3y - 28x^2y$
232. $-5a^4b + 15a^3b^2 - 45a^2b^3$
233. $24x^8y^4 - 28x^7y^5 + 16x^6y^7$
234. $3x^2 + 16x - 35$
235. $a^2 - 3a - 54$
236. $6x^2 - 29x + 28$
237. $3x^4 - 26x^3 + 25x^2 + 58x - 8$
238. $14x^5y - 36x^4y^2 + 46x^3y^3 - 20x^2y^4 + 4xy^5$
239. $3a^2b^2$
240. $-6x$
241. $\frac{3}{2}a^2c$
242. $\frac{2}{3}x$
243. $\frac{3}{2}x + 3$
244. $\frac{9}{2}b - 3a$
245. $x^2 - 2x + 5$
246. $\frac{1}{9}a^2b^7 - \frac{1}{6}b^4 - \frac{4}{3}b^3$

Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

247. $x^2 + 6x + 9$
248. $a^2 - 8a + 16$
249. $y^2 - 12y + 36$
250. $x^2 + 10x + 25$
251. $4m^2 - 20m + 25$
252. $9x^2 - 6x + 1$
253. $9x^2 + 24x + 16$
254. $9 - 12x + 4x^2$
255. $25x^2 + 40xy^3 + 16y^6$
256. $81x^6 - 18x^5y + x^4y^2$
257. $x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}$
258. $y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$
259. $\frac{x^2}{4} - 3xy^2 + 9y^4$
260. $\frac{4}{a^2} - \frac{4b^2}{3a} + \frac{b^4}{9}$

Obtén el resultado del producto de binomios conjugados:

261. $x^2 - 25$
262. $m^2 - 9$
263. $x^2 - 36$
264. $y^2 - 1$
265. $49 - x^2$
266. $25 - 16x^2$
267. $9x^2 - 25y^2$
268. $a^2 - 16b^2$
269. $9x^2y^2 - 4z^2$
270. $m^2 - 25n^2$
271. $9p^2 - 25q^2$
272. $\frac{25}{9}x^2 - \frac{4}{25}y^2$
273. $\frac{m^2}{4} - \frac{n^2}{9}$
274. $\frac{1}{4x^2} - \frac{9}{25y^2}$

Desarrolla los siguientes cubos de binomios:

275. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
276. $y^3 - 6y^2 + 12y - 8$
277. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
278. $a^3 - 12a^2 + 48a - 64$
279. $125 - 75x + 15x^2 - x^3$
280. $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$
281. $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
282. $64x^3 - 144x^2y + 108xy^2 - 27y^3$
283. $1 - 15xy + 75x^2y^2 - 125x^3y^3$
284. $\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2y + \frac{3}{2}xy^2 + y^3$
285. $\frac{x^3}{27} - \frac{x^2y}{6} + \frac{xy^2}{4} + \frac{y^3}{8}$
286. $\frac{1}{x^3} + \frac{9}{x^2y} + \frac{27}{xy^2} + \frac{27}{y^3}$

Factoriza las siguientes expresiones empleando el factor común:

287. $4(x - 3)$
288. $3(x + 5)$
289. $12x(2x - 3)$
290. $8y(x - 2)$
291. $3x(x - 2)$
292. $y^2(y + 1)$
293. $m^2(m^3 + m^2 - 1)$
294. $8x(x^2 - 3x + 2)$
295. $5a^2(3 + 5a - 7a^2)$
296. $3ab(2a - 1)$
297. $6xy(2x - 3y)$
298. $x^2y^3(4 - 8xy + 5x^2y^2)$
299. $3ab(6a^4 - 3a^2b - 2ab^2 + 4b^3)$
300. $11x^2y^3z^2(3z^2 + 6z - 2)$

Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados:

301. $(x - 1)(x + 1)$
302. $(y - 3)(y + 3)$
303. $(x - 4)(x + 4)$
304. $(2x - 5)(2x + 5)$
305. $(5 - x)(5 + x)$
306. $(4x - 3)(4x + 3)$
307. $(9 - 2y)(9 + 2y)$
308. $(10 - x)(10 + x)$
309. $(5m^2 - 9n)(5m^2 + 9n)$
310. $(3x^2 - y^2)(3x^2 + y^2)$
311. $\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{7}y\right)\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{7}y\right)$
312. $\left(\frac{1}{2}z - \frac{3}{5}w\right)\left(\frac{1}{2}z + \frac{3}{5}w\right)$
313. $\left(y - \frac{6}{5}z^3\right)\left(y + \frac{6}{5}z^3\right)$
314. $\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{5y}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{4}{5y}\right)$

Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

315. $(x + 1)^2$
316. $(y - 2)^2$
317. $(a + 3)^2$
318. $(x - 5)^2$
319. $(a - b)^2$
320. $(y + 6)^2$
321. $(m + n^2)^2$
322. $(4x + 1)^2$
323. $(3y - 4)^2$
324. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$
325. $\left(y - \frac{1}{3}\right)^2$
326. $\left(\frac{x}{2} + 4\right)^2$
327. $\left(\frac{m}{3} - \frac{3}{n}\right)^2$
328. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
329. $(12x + 5y)^2$

Factoriza los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

330. $(x + 2)(x + 1)$
331. $(x - 3)(x - 2)$
332. $(x + 5)(x + 4)$
333. $(x - 12)(x - 2)$
334. $(m + 4)(m + 3)$
335. $(x - 6)(x - 3)$
336. $(a + 6)(a - 2)$
337. $(y + 5)(y - 4)$
338. $(n - 9)(n + 7)$
339. $(z - 9)(z + 2)$
340. $(x - 12)(x + 4)$
341. $(x + 12)(x - 11)$
342. $(a - 7)(a + 5)$
343. $(y + 14)(y - 12)$

Factoriza los siguientes trinomios $ax^2 + bx + c$

344. $(x - 4)(3x - 2)$
345. $(3a + 2)(2a + 1)$
346. $(x - 3)(4x - 1)$
347. $(x - 1)(5x - 2)$
348. $(x - 4)(2x + 3)$
349. $(2m + 3)(3m + 1)$
350. $(2b + 5)(3b - 5)$
351. $(x - 2)(2x + 1)$
352. $(y - 2)(5y - 2)$
353. $(x - 2)(4x + 3)$
354. $(y + 3)(7y - 5)$
355. $(4x - 1)(5x + 1)$

Factoriza las siguientes sumas y diferencias de cubos:

356. $(x + 1)(x^2 - x + 1)$
357. $(y - 2)(y^2 + 2y + 4)$
358. $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$
359. $(y + 3)(y^2 - 3y + 9)$
360. $(4 - 3x)(16 + 12x + 9x^2)$
361. $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$
362. $(5x - y)(25x^2 + 5xy + y^2)$
363. $(2x^2 + 3y^2)(4x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4)$
364. $(1 - x^3y^3)(1 + x^3y^3 + x^6y^6)$
365. $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{10} + \frac{1}{25}\right)$
366. $\left(\frac{x}{3} + \frac{4}{x}\right)\left(\frac{x^2}{9} - \frac{4}{3} + \frac{16}{x^2}\right)$
367. $\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{4}{y^2}\right)$

Simplifica las siguientes expresiones:

368. $\frac{3}{2x}$
369. $\frac{2y}{x}$
370. $\frac{x - 5}{5}$
371. x
372. $x + 1$
373. $-\frac{1}{x}$
374. x
375. $x + 2$
376. $\frac{x + 3}{x - 3}$
377. $\frac{x}{x - 4}$
378. $\frac{3x + 2}{2x + 1}$
379. $\frac{4x^2 + 2x + 1}{2x - 1}$

Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

380. $\frac{2x+h}{x^2+xh}$
381. $\frac{2x+h}{(x+a)(x-a+h)}$
382. $\frac{a+b}{ab}$
383. $\frac{2ax}{x^2-h^2}$
384. $\frac{2by}{y^2-4}$
385. $\frac{2a}{1-a^2}$
386. $\frac{2x^2-2x+h}{(x-1)(x-h-1)}$
387. $\frac{2x^2+2xh-2}{(x+h-1)(x-1)}$
388. $\frac{2h}{h^2-x^2}$
389. $\frac{h}{x^2+hx}$
390. $\frac{-b}{a^2+ab}$
391. $\frac{a^2-b^2}{ab}$
392. $\frac{2h+y}{hy-y^2}$
393. $\frac{-h}{(x+1)(x+h+1)}$
394. $\frac{-2a}{(x+h+1)(x+h-1)}$
395. $\frac{2h}{(x+h-1)(x-1)}$
396. $\frac{1}{x^2+xh}$
397. $\frac{1}{x^2-h^2}$
398. $\frac{x+1}{x-1}$
399. $\frac{x}{a}$
400. $x-1$
401. $x+1$
402. $\frac{x}{x+1}$
403. $\frac{x+h}{x-h}$
404. $\frac{x}{x-h}$
405. $\frac{x}{a}$
406. $x+h$
407. $\frac{1}{x+1}$
408. $\frac{x-1}{x+2}$
409. $\frac{1}{x-1}$
410. $\frac{x+a}{x}$

Expresa como exponentes fraccionarios los siguientes radicales:

411. $x^{\frac{1}{2}}$
412. $(3x)^{\frac{1}{2}}$
413. $x^{\frac{3}{2}}$
414. $(5x)^{\frac{5}{2}}$
415. $(2a)^{\frac{1}{3}}$
416. $(5x^3y^4)^{\frac{1}{4}}$
417. $(x+2)^{\frac{1}{2}}$
418. $(a+b)^{\frac{1}{4}}$
419. $(2x-3)^{\frac{2}{5}}$
420. $(5x+3y)^{\frac{1}{7}}$

Expresa como radical las siguientes expresiones:

421. $\sqrt[3]{x^2}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$
422. $\sqrt[4]{x}$
423. $\sqrt[3]{6x}$
424. $\sqrt[3]{\left(4x^3y^5\right)^4}=\left(\sqrt[3]{4x^3y^5}\right)^4$
425. $\sqrt[5]{\frac{2}{xy^3}}$
426. $\sqrt{x+8}$
427. $\sqrt[6]{3x+1}$
428. $\sqrt[3]{(2a-5b)^2}=\left(\sqrt[3]{2a-5b}\right)^2$
429. $\sqrt[5]{\left(\frac{2-x}{x+y}\right)^3}=\left(\sqrt[5]{\frac{2-x}{x+y}}\right)^3$

Aplica los teoremas correspondientes de exponentes y radicales para simplificar las siguientes expresiones:

430. x^{12}
431. $64x^6$
432. $25x^2y^8$
433. $\frac{1}{x^3}$
434. $\frac{1}{(2xy)^2}=\frac{1}{4x^2y^2}$
435. $\frac{32x^{15}}{243y^{10}}$
436. x^2
437. $4xy^2$
438. $\frac{5}{7}x^3y$
439. $3xy^2$
440. $x\sqrt{x}$
441. $x\sqrt[3]{x^2}$
442. $ax\sqrt{ax}$
443. $(3x)^2\sqrt{3x}=9x^2\sqrt{3x}$
444. $4x\sqrt{2x}$
445. $2x\sqrt[3]{2x^2}$
446. $5x\sqrt{5x}$
447. $(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$
448. $(x+a)\sqrt[4]{x+a}$

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

449. $x=-2$
450. $y=2$
451. $x=5$
452. $x=2$
453. $x=\frac{5}{4}$
454. $x=-\frac{5}{2}$
455. $x=-\frac{1}{2}$
456. $x=-1$
457. $x=\frac{9}{25}$
458. $x=\frac{22}{3}$
459. $x=-\frac{3}{8}$
460. $x=0$
461. $x=0$
462. $x=-\frac{11}{17}$
463. $x=\frac{7}{3}$
464. No existe solución
465. $x=-\frac{22}{5}$
466. $x=\frac{2}{5}$
467. $x=-\frac{32}{29}$
468. $x=\frac{77}{29}$
469. $x=-16$
470. $x=\frac{30}{7}$

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

471. $x = -3, x = -1$
472. $x = 3, x = 2$
473. $x = -4, x = -3$
474. $x = 12, x = 2$
475. $x = -5, x = -4$
476. $y = 8, y = -7$
477. $x = -6, x = 2$
478. $x = 6, x = 3$
479. $x = 9, x = -7$
480. $y = -5, y = 4$
481. $a = -8, a = 6$
482. $x = 1, x = \frac{2}{5}$
483. $x = 4, x = -\frac{3}{2}$
484. $x = -3, x = \frac{5}{7}$
485. $x = -\frac{2}{3}, x = -\frac{1}{2}$
486. $x = \frac{1}{4}, x = -\frac{1}{5}$

Resuelve los siguientes sistemas:

487. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

488. $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

489. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

490. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

491. $\begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$

492. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$

493. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

494. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

495. $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

496. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$

497. $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases}$

498. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$

499. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{cases}$

500. $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = 0 \end{cases}$

501. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$

502. $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$

503. $\begin{cases} (3, -3) \\ (3, 1) \end{cases}$

504. $\begin{cases} (-4, -8) \\ (2, 4) \end{cases}$

505. $\begin{cases} (-5, 6) \\ (2, -1) \end{cases}$

Aplica el teorema de Pitágoras para determinar el valor de "x" en los siguientes rectángulos:

506. $x = 5$
507. $x = 12$
508. $x = 10$
509. $x = 9$
510. $x = 25$
511. $x = 4\sqrt{5}$

Escribe las funciones trigonométricas correspondientes a los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos:

512.

$\text{sen } A = \frac{4}{5}$ $\quad \text{sen } B = \frac{3}{5}$

$\cos A = \frac{3}{5}$ $\quad \cos B = \frac{4}{5}$

$\tan A = \frac{4}{3}$ $\quad \tan B = \frac{3}{4}$

$\cot A = \frac{3}{4}$ $\quad \cot B = \frac{4}{3}$

$\sec A = \frac{5}{3}$ $\quad \sec B = \frac{5}{4}$

$\csc A = \frac{5}{4}$ $\quad \csc B = \frac{5}{3}$

513.

$\text{sen } A = \frac{5}{13}$ $\quad \text{sen } B = \frac{12}{13}$

$\cos A = \frac{12}{13}$ $\quad \cos B = \frac{5}{13}$

$\tan A = \frac{5}{12}$ $\quad \tan B = \frac{12}{5}$

$\cot A = \frac{12}{5}$ $\quad \cot B = \frac{5}{12}$

$\sec A = \frac{13}{12}$ $\quad \sec B = \frac{13}{5}$

$\csc A = \frac{13}{5}$ $\quad \csc B = \frac{13}{12}$

Determina las ecuaciones de las siguientes rectas:

514. $4x - y - 5 = 0$
515. $3x + y = 0$
516. $x - y + 3 = 0$
517. $2x - y - 3 = 0$
518. $y - 5 = 0$
519. $3x - 5 = 0$
520. $4x - 3y - 17 = 0$
521. $x - y + 1 = 0$
522. $7x - 3y - 6 = 0$
523. $x - 2y + 1 = 0$
524. $7x - 12y - 4 = 0$