

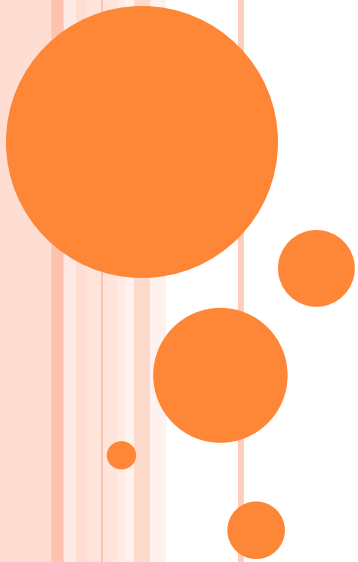


FUNCIÓN DE BESSEL

Ing. PhD. Ciro D. Radicelli G.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN A FUNCIONES DE BESSEL
FM DE BANDA ANCHA
FUNCIÓN DE BESSEL



INTRODUCCIÓN A FUNCIONES DE BESSEL

- La ecuación de Bessel aparece cuando se buscan soluciones a la ecuación de Laplace o a la ecuación de Helmholtz por el método de separación de variables en coordenadas cilíndricas o esféricas.
- Por ello, las funciones de Bessel son especialmente importantes en muchos problemas de propagación de ondas, potenciales electrostáticos entre otros.
- Cuando se resuelven sistemas en coordenadas cilíndricas, se obtienen funciones de Bessel de orden entero ($\alpha = n$) y en problemas resueltos en coordenadas esféricas, se obtienen funciones de Bessel de orden semientero ($\alpha = n + 1/2$)



FM DE BANDA ANCHA

Ahora estamos interesados en determinar el espectro de una señal FM para moduladora sinusoidal (un tono simple), pero para un valor arbitrario de β . En general una señal FM generada a partir de una señal moduladora sinusoidal no es periódica a menos que la frecuencia de la portadora f_c sea múltiplo de la frecuencia de la moduladora f_m . Sin embargo, se puede escribir para la señal FM la ecuación (3.14), donde $\tilde{s}(t)$ es la envolvente compleja de la señal FM.

$$s(t) = \Re[A_c \exp(j2\pi f_c t + j\beta \sin(2\pi f_m t))] = \Re[\tilde{s}(t) \exp(j2\pi f_c t)] \quad (3.14)$$

A partir de la ecuación (3.14) se puede determinar de forma sencilla cuál es la envolvente compleja de la señal FM, obteniéndose la ecuación (3.15). Ahora resulta que la envolvente compleja sí que es periódica con frecuencia fundamental igual a la frecuencia de la señal moduladora f_m .

$$\tilde{s}(t) = \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t)] \quad (3.15)$$



FM DE BANDA ANCHA

La envolvente compleja $\tilde{s}(t)$ de la señal FM ya que es periódica se va a poder representar en serie de Fourier compleja según la ecuación (3.16).

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_m t) \quad (3.16)$$

Para los coeficientes complejos c_n de la serie se puede poner el desarrollo de la ecuación (3.17).

$$\begin{aligned} c_n &= f_m \int_{-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} \tilde{s}(t) \exp(-j2\pi n f_m t) dt \\ &= f_m A_c \int_{-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t) - j2\pi n f_m t] dt \end{aligned} \quad (3.17)$$

Haciendo el cambio de variable $x = 2\pi f_m t$ en la ecuación (3.17) se tiene la ecuación (3.18).

$$c_n = \frac{A_c}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[j(\beta \sin(x) - nx)] dx \quad (3.18)$$



FUNCIÓN DE BESSEL

La integral que aparece en la ecuación (3.18) no se puede evaluar directamente. El resultado de dicha integral como función del índice de modulación β y que depende del valor de n se conoce como *función de Bessel de primera clase*, de argumento β y orden n . Se denota con $J_n(\beta)$ y viene dada por la ecuación (3.19). Entonces los coeficientes c_n se relacionan directamente con dicha función según la ecuación (3.20).

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[j(\beta \sin(x) - nx)] dx \quad (3.19)$$

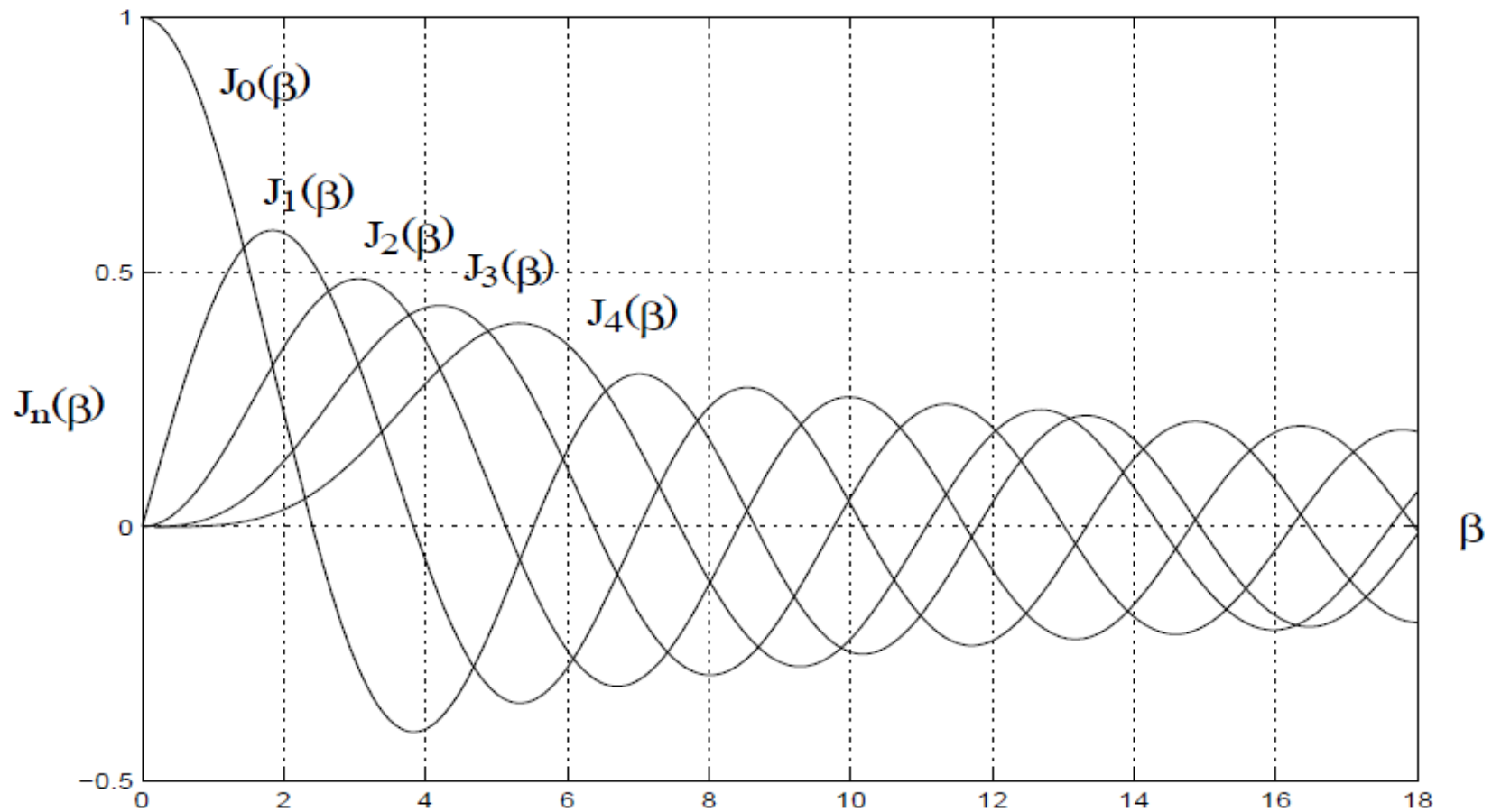
$$c_n = A_c J_n(\beta) \quad (3.20)$$

Sustituyendo el resultado de la ecuación (3.20) en la expresión de la serie de Fourier para la envolvente compleja $\tilde{s}(t)$ dada por la ecuación (3.16), se tiene la ecuación (3.21).

$$\tilde{s}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp(j2\pi n f_m t) \quad (3.21)$$



FUNCIÓN DE BESSEL II



MODULACIONES ANGULARES

ACTIVIDAD EN CLASE

- Realice una rueda de atributos acerca de las ventajas de las funciones de Bessel, enunciadas en el artículo denominado: “Funciones de Bessel y Neumann”.



¿PREGUNTAS?

