

UNIDAD I → HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

VECTORES EN EL PLANO Y ESPACIO

CONTENIDO

- * Definición de Vector.
- * Tipos de Sistemas de referencia.
- * Representación de un Vector en diferentes coordenadas en una dimensión, 2(dos) dimensiones y 3 dimensiones.
- * Vector unitarios, coseno directores, y $\hat{x}$ directores.
- * Representación de un vector en el espacio en $\neq$ coordenadas.
- * Operaciones Vectoriales.
- * Definición de Vector posición, Vector posición relativo.
- * Resolución de ejercicios.

Repaso de Trigonometría

Concepto de trigonometría.- La trigonometría es la ciencia que estudia los triángulos.

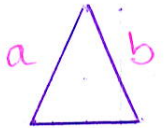
Triángulo.- Es una figura geométrica plana que está compuesta de 3 lados y tres ángulos.

Clasificación de los triángulos.- Los triángulos se clasifican en:

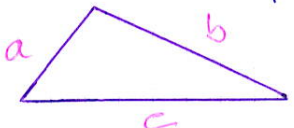
Por sus lados.- Δ isósceles, equilátero y escaleno.

Isósceles.-  $a=b$
 $a \neq c$
 $b \neq c$ Es aquel que tiene los dos lados iguales y uno diferente.

Equilátero.- Es aquel que tiene los 3 lados iguales

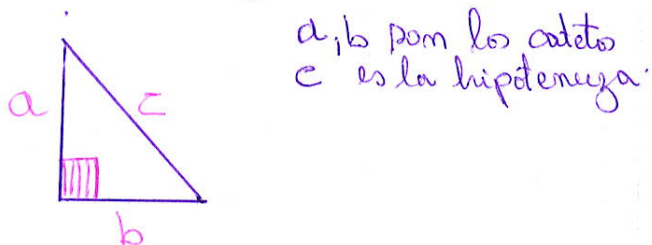
 $a=b=c$

Escaleno.- Es aquel que tiene los tres lados diferentes.

 $a \neq b \neq c$

Por sus ángulos - Se clasifican en triángulo rectángulo, acutángulo y obtusángulo.

Los triángulos rectángulos son aquellos que poseen un ángulo recto dos catetos y la hipotenusa.



Los triángulos obtusángulo y acutángulo - son aquellos que tienen como característica un ángulo agudo y un ángulo obtuso.



Resolución de Triángulos

Condiciones generales - Para resolver un triángulo en general se debe conocer 3 lados y tener como incógnita 3 datos igual.

Datos conocidos

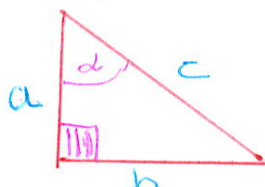
3 lados
2 lados y un $\angle$
2 $\angle$ s y un lado

Datos por conocer

3 ángulos $\angle$ s
1 lado y dos ángulos
1 $\angle$ y dos lados

Resolución de un triángulo rectángulo

Para resolver un triángulo rectángulo se utiliza las Funciones trigonométricas y el teorema de pitágoras.



a = cateto
b = cateto
c = hipotenusa

Funciones trigonométricas

Sen
cos
tg
ctg
sect
coset

$$\text{sen} = \frac{\text{cat opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos} = \frac{\text{cat adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg} = \frac{\text{cat opuesto}}{\text{cat adyacente}}$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{cos} \alpha = \frac{a}{c}$$

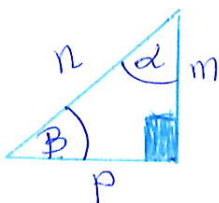
$$\text{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Teorema de Pitágoras: -

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Aplicaciones:

Resolver los siguientes triángulos rectángulos



Datos:

$$n = 20u$$

$$m = 6u$$

$$\angle = 90^\circ$$

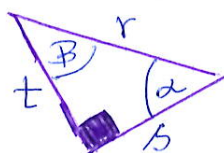
Datos por hallar

$$\alpha = ??$$

$$\beta = ??$$

$$p = ??$$

Hallar α , β con las funciones sen, cos, tg y comprobar que los ángulos son los mismos.



Datos:

$$r = 6u$$

$$\alpha = 38^\circ$$

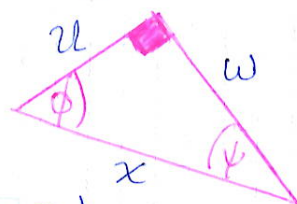
$$\angle = 90^\circ$$

Datos por hallar

$$\beta = ?$$

$$t = ?$$

$$s = ?$$



Datos:

$$u = 7u$$

$$w = 9u$$

$$\angle = 90^\circ$$

Datos por hallar

$$x = ?$$

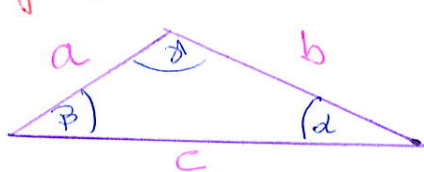
$$\phi = ?$$

$$\psi = ?$$

Resolución de triángulos obtusángulos y acutángulos

Para resolver este tipo de triángulos se utiliza la ley de los senos y la ley de los cosenos.

Ley de los cosenos: -



$$\begin{aligned} a &\rightarrow \alpha \vee \hat{A} \\ b &\rightarrow \beta \vee \hat{B} \\ c &\rightarrow \gamma \vee \hat{C} \end{aligned}$$

Condiciones que debe cumplir el triángulo.

Datos: 3 lados

$$?? \quad 3 \neq 5$$

2 lados y 1 $\angle$

$$?? \quad 1 \text{ lado ; } 2 \angle$$

+ Debe estar entre los dos lados conocidos.



Para resolver un triángulo acutángulo y obtusángulo utilizando la ley de los cosenos el triángulo debe cumplir la siguiente condición

* Conocer los dos lados y el $\angle$ interno;

Ejemplo: Si conoces a y c conoces el $\angle$ interno B
 " " a y b " el $\angle$ A
 " " b y c " " $\angle$ C

Para resolver el Δ obtusángulo y acutángulo utilizo las siguientes ecuaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

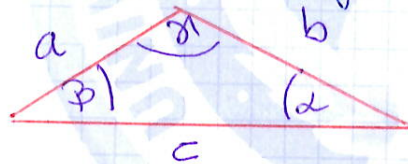
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ejercicio de clase:

Despejar: $\cos \alpha$; $\cos \beta$; $\cos \gamma$.

Ejemplo: Resolver el siguiente triángulo



Datos: Hallar.

$$a = 5u$$

$$b = 7u$$

$$\gamma = 105^\circ$$

$$c = ?$$

$$\alpha = ?$$

$$\beta = ?$$

$$c = 9.59u$$

Desarrollo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \Rightarrow c^2 = 5^2 + 7^2 - 2(5)(7) \cos 105^\circ \Rightarrow$$

$$c^2 = 25 + 49 - 70 \cos 105^\circ \Rightarrow c^2 = 74 + 18 \Rightarrow c^2 = 92.11u$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{92.11} \Rightarrow c = 9.59u$$

Para hallar α y β

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha; \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \alpha = \frac{7^2 + (9.59)^2 - 5^2}{2(7)(9.59)} = \frac{49 + 92.11 - 25}{134.1} = \frac{116.11}{134.1} = 0.86u$$

$$\cos \alpha = 0.86 \Rightarrow \alpha = 30.68^\circ$$

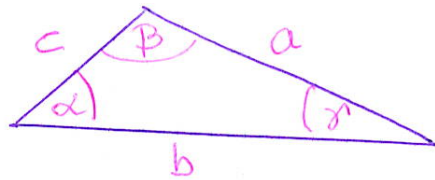
$$\beta = 44.31^\circ \text{ Comprobar}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

411



Ley de los Senos:



Condiciones:

2 lados y 1 $\angle$ $\rightarrow$ El $\angle$ puede ser opuesto a cualquiera de los dos lados
 2 $\angle$ s y 1 lado

Un lado puede ser opuesto a cualquiera de los dos lados.

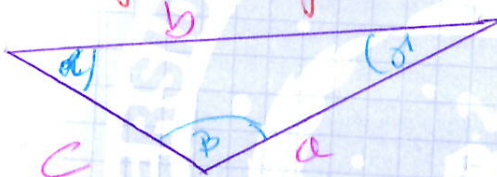
Ejemplo:

Conoce a, b [α, β]
 a, c [α, γ]
 b, c [β, γ]

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Resolver el siguiente ejercicio:



Datos:

$$c = 5u$$

$$a = 10u$$

$$[\alpha \vee \gamma] \alpha = 35^\circ$$

Determinar:

$$b = ?$$

$$\gamma = ?$$

$$\beta = ?$$

Desarrollo:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \frac{10}{\sin 35^\circ} = \frac{b}{\sin \beta} \quad ; \quad \frac{10}{\sin 35^\circ} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{10}{\sin 35^\circ} = \frac{5}{\sin \gamma}$$

$$\Rightarrow 10 \sin \gamma = 5 \sin 35^\circ \Rightarrow \sin \gamma = \frac{5 \sin 35^\circ}{10} = 0.286 \Rightarrow \gamma = 16.61^\circ$$

$$b) \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 35^\circ - 16.61^\circ = 128.39^\circ$$

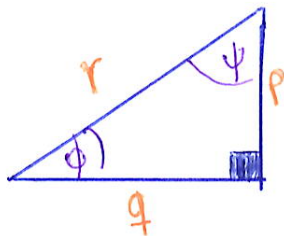
$$c) \quad \frac{10}{\sin 35^\circ} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta 10 = b \sin 35^\circ$$

$$\frac{10 \sin \beta}{\sin 35^\circ} = b \Rightarrow b = \frac{10 \cdot \sin (128.39^\circ)}{\sin 35^\circ} = 13.66u$$

$$b = 13.66u$$



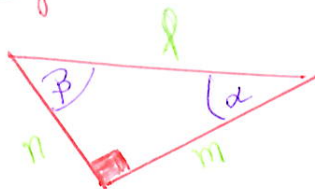
Resolver los siguientes ejercicios:



Datos: $r = 15u$
 $p = 6u$
 $\gamma = 90^\circ$

Hallar: $\psi = ?$
 $\phi = ?$
 $q = ?$

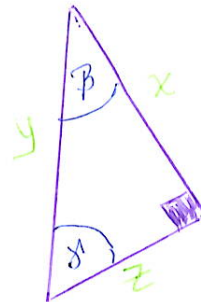
Hallar: ψ, ϕ con las funciones
 $\text{sen}, \text{cos}, \text{tg}$



Datos: $m = 9u$
 $\alpha = 38^\circ$
 $\gamma = 90^\circ$

Hallar: $l = ?$
 $n = ?$
 $\beta = ?$

Hallar β con las funciones
 $\text{sen}, \text{cos}, \text{tg}$



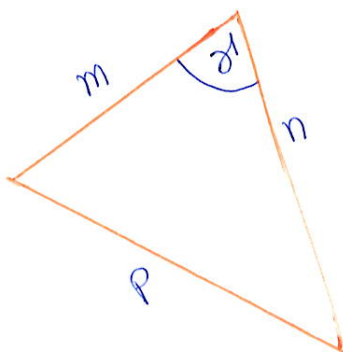
Datos: $x = 12u$
 $\beta = 40^\circ$
 $\gamma = 90^\circ$

Hallar: $y = ?$
 $\gamma' = ?$
 $z = ?$

Hallar γ con las funciones
 $\text{sen}, \text{cos}, \text{tg}$

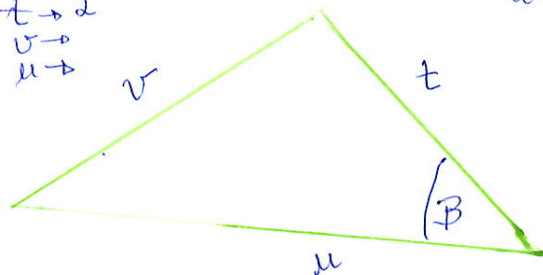
2) Dado los siguientes triángulos utilizar la ley de los cosenos y ley de los senos para resolver

$m \rightarrow a$
 $n \rightarrow b$
 $p \rightarrow c$



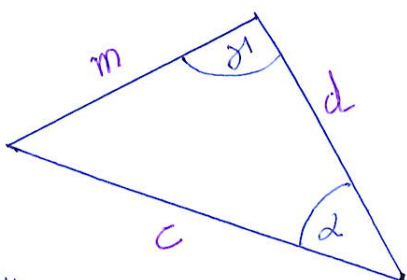
Datos: $m = 10u$
 $n = 12u$
 $\gamma = 85^\circ$

$t \rightarrow a$
 $v \rightarrow b$
 $u \rightarrow c$

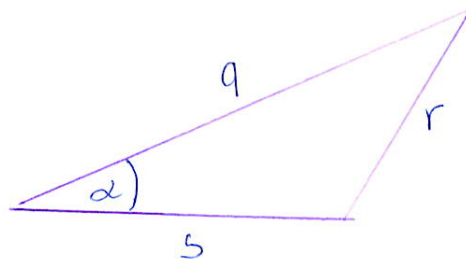


Datos: $t = 13u$
 $v = 15u$
 $\beta = 68^\circ$

$m \rightarrow a$
 $d \rightarrow b$
 $c \rightarrow c$



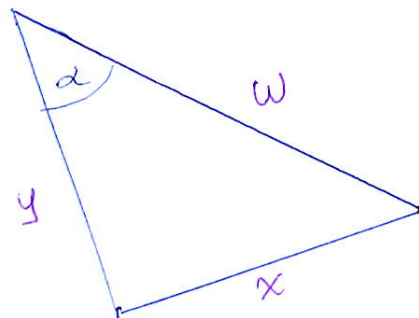
Datos: $c = 18u$
 $d = 14u$
 $\gamma = 100^\circ$



$r \rightarrow a$
 $s \rightarrow b$
 $q \rightarrow c$

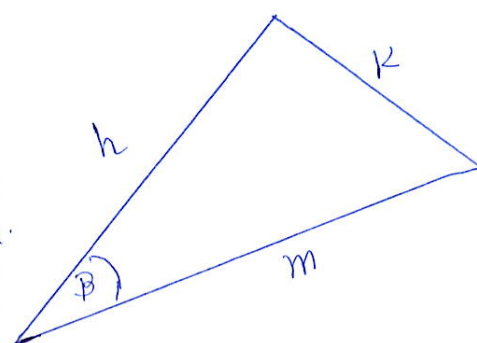
Datos: $r = 8u$
 $\alpha = 42^\circ$
 $s = 10u$

$x \rightarrow a$
 $y \rightarrow b$
 $w \rightarrow c$



Datos: $y = 10u$
 $w = 15u$
 $\alpha = 50^\circ$

$h \rightarrow a$
 $k \rightarrow b$
 $m \rightarrow c$



Datos: $m = 22u$
 $h = 15u$
 $\beta = 28^\circ$