Estudio Energético del Movimiento Armónico Simple

Energía cinética del M.A.S y sus gráficos.

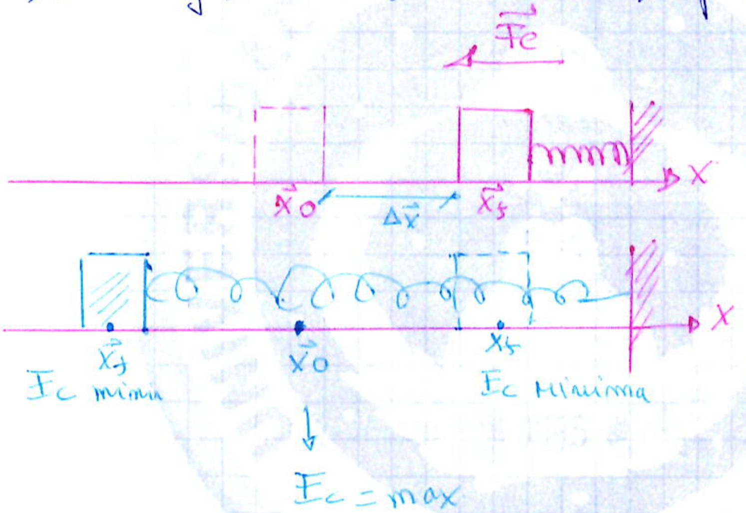
Energía cinética de traslación $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

Energía " de una partícula en el M.A.S

$$E_c = \frac{1}{2} k A^2$$ (como energía máxima) (como valor mínimo = 0)

La energía cinética en un M.A.S, en un punto está asociada a la velocidad que el cuerpo tiene en dicho punto.

La E_c en el M.A.S varía de manera periódica entre un valor mínimo en los extremos y un valor máximo en la posición de equilibrio.



La Energía cinética se puede expresar en función de la (x, t).

x → elongación
t → tiempo

$E_c(x)$; Energía cinética en función de la elongación.

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) ;$$

$E_c(t)$; Energía cinética en función del tiempo

$$E_c = \frac{1}{2} k A^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_0)$$

Donde:

E_c: Energía cinética, su unidad de medida es el J [MKS]

A: Amplitud, su unidad de medida es de longitud (MKS)

ω: Frecuencia angular; su unidad de medida $\frac{rad}{s}$.

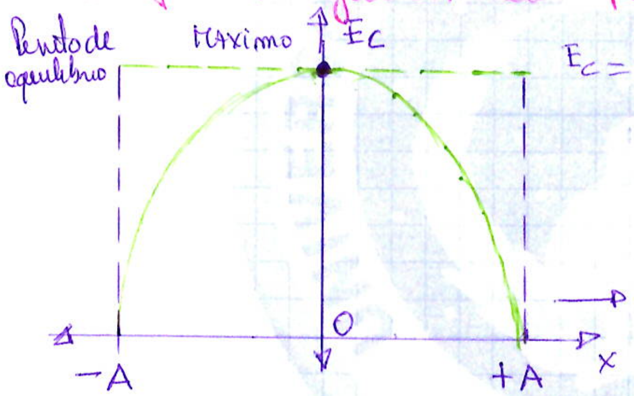
φ_0: Fase inicial [su unidad de medida en MKS o sistema Internacional radian [rad]

K: Constante del M.A.S $[\frac{N}{m}]$//.

$E_c = \frac{1}{2}KA^2$; [Energía cinética máxima].

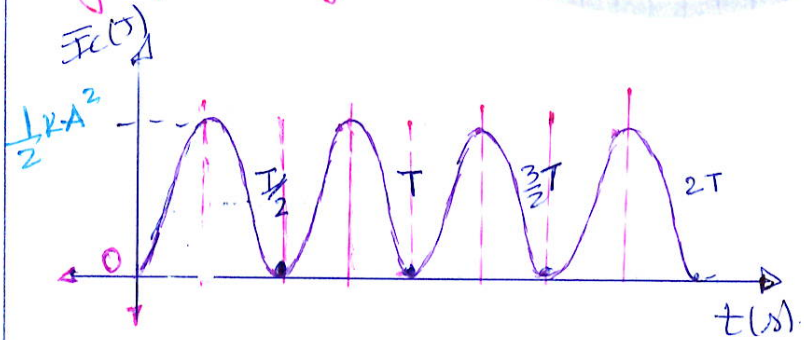
$E_c = 0$ " " mínima

Gráfica energía cinética - Posición $E_c(x)$



$E_c = \frac{1}{2}K(A^2 - x^2)$.

Gráfica energía cinética - t $E_c(t)$



La energía cinética es mínima cuando inicia el movimiento repitiéndose en intervalos de $\frac{T}{2}$ s.

Campus Norte "Ms. Edison Riera R." Avda. Antonio José de Sucre, Km. 1.5 Vía a Guano. Teléfonos: (593)3 2364209, 2364314, Fax Extensión 117. Campus "La Dolorosa" Avda. Eloy Alfaro y 10 de Agosto. Teléfonos: (593)3 2628115, 2628211. Riobamba - Ecuador

Demostración:

$$E_c = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) \; //$$

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$ Energía cinética de traslación

$$v = -A\omega \, sen(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_c = \frac{1}{2}m[-A\omega \, sen(\omega t + \varphi_0)]^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}m[A^2\omega^2 \, sen^2(\;)]$$

$E_c = \frac{1}{2}\boxed{m}A^2\boxed{\omega^2}\, sen^2(\;)$ $\quad k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$E_c = \frac{1}{2}kA^2 \, sen^2(\;)$

Por trigonometría

$sen^2(\;) + cos^2(\;) = 1$

$sen^2(\;) = 1 - cos^2(\;)$

$$E_c = \frac{1}{2}kA^2[1 - cos^2(\;)]$$

$$E_c = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}k\underbrace{A^2 cos^2(\;)}$$

$$x^2 = A^2 cos^2(\;) =$$

Sacamos factor común

$$E_c = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

otra forma: $v = -A\omega \, sen(\;) \Rightarrow v^2 = A^2\omega^2 sen^2(\;)$

$sen^2(\;) + cos^2(\;) = 1$

$sen^2(\;) = 1 - cos^2(\;)$

$v^2 = A^2\omega^2[1 - cos^2(\;)]$

$* \; E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\boxed{m}A^2\boxed{\omega^2}[1 - cos^2(\;)]$

$= \frac{1}{2}kA^2[1 - cos^2(\;)]$

$= \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}k\underbrace{A^2cos^2(\;)}_{x^2} = \frac{1}{2}k[A^2 - x^2]$

$= \frac{1}{2}m[\omega\sqrt{\;}\;]$

$v^2 = w(A^2 - x^2)$

$v = w\sqrt{A^2 - x^2} \; //$

Energía Potencial del M.A.S

Se determina utilizando la fuerza elástica $\vec{F}e = -K\Delta\vec{x}$;

Energía Potencial $Ep(x)$.

$$Ep = \frac{1}{2}Kx^2$$

Fuerzas conservativas

Fp, Fe.

Energía Potencial $Ep(t)$.

$$Ep = \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

La energía potencial en un MAS

Movimiento Armónico Simple, varía de manera periódica entre un valor mínimo en la posición de equilibrio y un valor máximo en los extremos (lo contrario de Ec)

$Ep_{max} = \frac{1}{2}KA^2$ (En los extremos)

$Ep_{min} = 0$ (posición de equilibrio)

Demostración $Ep = \frac{1}{2}Kx^2$; $Ep = \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$.

$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$.

$Ep = \frac{1}{2}Kx^2$

$Ep = \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\ )^2$ ///

$\vec{F}e = -K\vec{x}$

Partimos del trabajo que hace la Fe para ir de un punto 1 → 2 ; o un pun A → B.

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} -Kx\,dx$$

$$W = -K\frac{x^2}{2}\Big|_{x_1}^{x_2} = -\left[K\frac{x_2^2}{2} - K\frac{x_1^2}{2}\right]$$

$$\stackrel{!}{=} -\Delta P = -[Ep_2 - Ep_1]$$

$\therefore$

$Ep_2 = \frac{1}{2}Kx_2^2$ para el punto 2

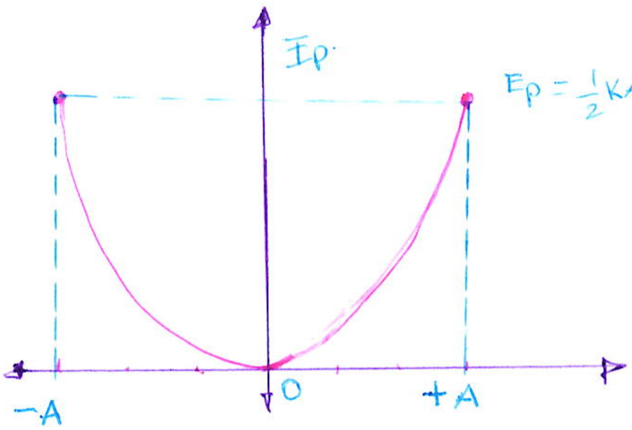
$Ep_1 = \frac{1}{2}Kx_2^2$ " " " 1

En términos generales

$Ep = \frac{1}{2}Kx^2$ //

Campus Norte "Ms. Edison Riera R." Avda. Antonio José de Sucre, Km. 1.5 Vía a Guano
Teléfonos: (593)3 2364309, 2364314, Fax Extensión 117
Campus "La Dolorosa" Avda. Eloy Alfaro y 10 de Agosto. Teléfonos: (593)3 2628115, 2628211
Riobamba - Ecuador
www.unach.edu.ec

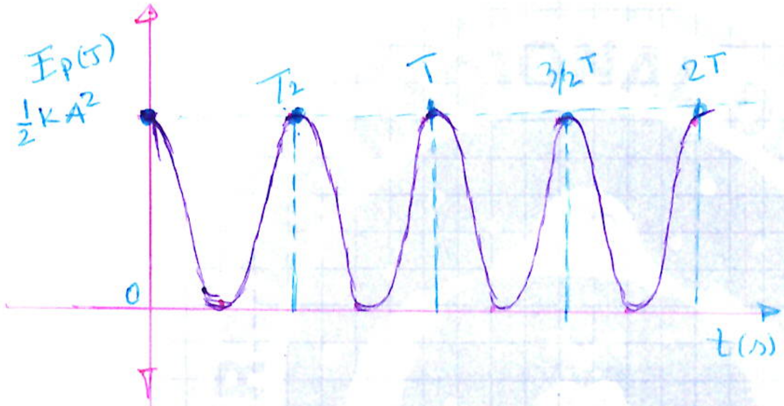
Grafica de la $E_p(x)$ Grafica de la $E_p(t)$.



$E_p = \frac{1}{2}KA^2$ [En los extremos]

$E_p = 0$ Posicion de equilibrio

$E_p(t)$



La energia potencial es maxima cuando comienza el movimiento repitiendose en intervalos de $\frac{T}{2}$

Energia mecanica en el M.A.S

$E_m = E_c + E_{pg} + E_{pe}$ Movimiento de traslación.

M.A.S

$E_m = E_c + E_{pe}$

$E_m = \frac{1}{2}K(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}Kx^2$

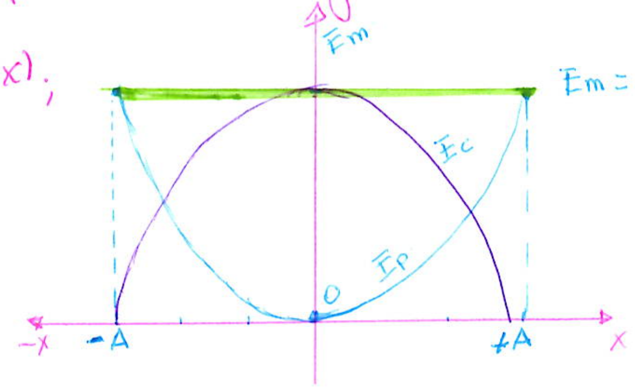
$E_m = \frac{1}{2}KA^2 - \cancel{\frac{1}{2}Kx^2} + \cancel{\frac{1}{2}Kx^2}$

$E_m = \frac{1}{2}KA^2$; $E_{p_{max}} = \frac{1}{2}KA^2$; $E_{c_{max}} = \frac{1}{2}KA^2$

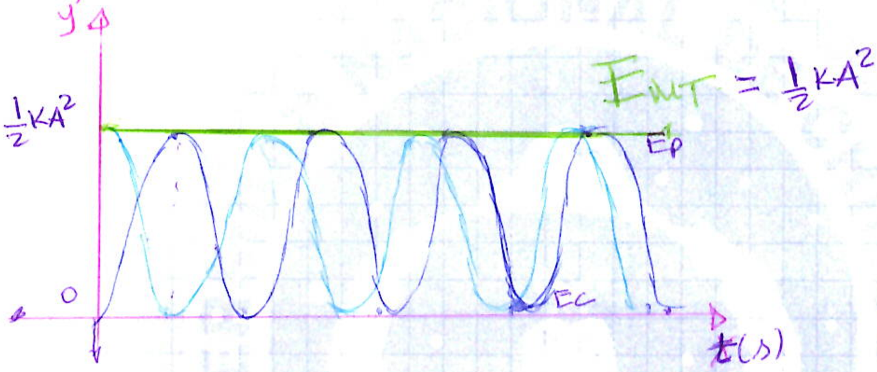
$E_m = cte$; permanece constante a lo largo del tiempo y en cualquier punto de x del movimiento.

Graficos de la energia mecanica del M. A. S.

$E_m(x)$;



$E_m(t)$;



otra demostración:

$$X = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$E_{MT} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

$$E_{MT} = \frac{1}{2} m \left(-A\omega \operatorname{sen}(\ )\right)^2 + \frac{1}{2} K \left(A\cos(\ )\right)^2$$

$$E_{MT} = \frac{1}{2} \boxed{m} A^2 \boxed{\omega^2} \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} K A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

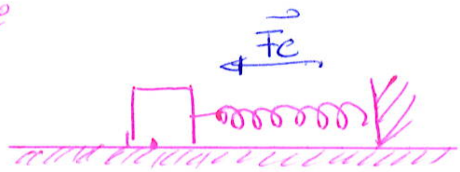
$$E_{MT} = \frac{1}{2} K A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} K A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_{MT} = \frac{1}{2} K A^2 \underbrace{\left[\operatorname{sen}^2(\ ) + \cos^2(\ )\right]}_{1} = \frac{1}{2} K A^2 //$$

Campus Norte "Ms. Edison Riera R." Avda. Antonio José de Sucre, Km. 1.5 Vía a Guano. Teléfonos: (593-3) 2364309, 2364314, Fax Extensión 117
Campus "La Dolorosa" Avda. Eloy Alfaro y 10 de Agosto. Teléfonos: (593-3) 2628115, 2627211
Riobamba - Ecuador

Oscilaciones en un resorte. MAS

Sistema masa - resorte



$$\sum F_x = m a_x$$

$$-kx = ma$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} x = 0 \qquad \frac{k}{m}\left[\frac{N}{m\,kg}\right]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \frac{k}{m}\left[\frac{kg}{\cancel{m}}\frac{\cancel{m}}{s^2}\frac{1}{\cancel{kg}}\right]$$

Soluciones de la ecuación

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \frac{k}{m}\left[\frac{1}{s^2}\right]$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -A\,x^2$$

Definiciones de $v_{max} = A\omega$

$$a_{max} = A\omega^2$$

$$v(t) = -v_{max}\,\text{sen}(\omega t + \varphi) \qquad a(t) = -a_{max}\cos(\omega t + \phi)$$

ω · [Es la frecuencia angular]

$$\omega = \frac{K}{m} \cdot \left[\frac{1}{s^2}\right] \qquad \omega^2 = \left(\frac{1}{s^2}\right)^2 \left[\frac{1}{s}\right]$$

Frecuencia angular en función de la frecuencia. $f = \frac{1}{T}$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Calculo del Periodo

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\frac{K}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow T^2 K = m\,4\pi^2$$

$$T^2 = \frac{m\,4\pi^2}{K}$$

$$T = \sqrt{4\pi^2 \cdot \frac{m}{K}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Energías del Sistema masa resorte.

En el sistema masa resorte la partícula obedece la ley de Hooke.

$$\vec{F} = -K\vec{x}$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

$$E_T = \frac{1}{2}K A^2 ;$$

$$E_m = E_c + E_{pe}$$

$$\Rightarrow v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$E_m = E_c + E_{pe}$

$\cancel{\frac{1}{2}} k A^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m v^2 + \cancel{\frac{1}{2}} k x^2.$

$\frac{\cancel{m} v^2}{\cancel{m}} = \frac{k}{m}(\;^2 - \;^2)$

$v^2 = \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2}(\;^2 - \;^2)$

$v^2 = \omega^2(\;^2 - \;^2).$

$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

Si $x = 0 \Rightarrow$ $v = \pm \omega A$ $v = v_{max}.$

$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - 0} =$

Si se tiene que: $x^2 = A^2 \Rightarrow v = 0$

Campus Norte "Ms. Edison Riera R." Avda. Antonio José de Sucre, Km. 1.5 Vía a Guano. Teléfonos: (593)3 2364309, 2364314, Fax Extensión 117
Campus "La Dolorosa" Avda. Eloy Alfaro y 10 de Agosto. Teléfonos: (593)3 2628115, 2625211
Riobamba - Ecuador